Atranka į Baltijos kelio konkursą

2025-09-28

1. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams $a_0, a_1, \ldots, a_n, k$, kur $n > 1$ ir $a_1 = a_{n-1} = 0$, galioja nelygybė:

$$|a_0| - |a_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$

Sprendimas: Tegu t yra lygties $x^2 - kx - 1 = 0$ šaknis, $|t| \geqslant 1$ (tokia šaknis tikrai egzistuoja, nes šaknų sandauga -1, o šaknys realios. Tada kiekvienam $i = 0, 1, \ldots, n-2$,

$|a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| = \left|(a_i - ta_{i+1}) + \frac{1}{t}(a_{i+1} - ta_{i+2})\right| \geqslant |a_i - ta_{i+1}| - \frac{1}{|t|}|a_{i+1} - ta_{i+2}| \geqslant |a_i - ta_{i+1}| - |a_{i+1} - ta_{i+2}|$ (kadangi $\frac{1}{|t|} \leqslant 1$). Sudėję šias nelygybes nuo $i = 0$ iki $n-2$ (išsaugant $\frac{1}{|t|}$, kai $i = n-2$),

$$\sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| \geqslant |a_0 - ta_1| - \frac{1}{|t|}|a_{n-1} - ta_n| = |a_0| - |a_n|.$$

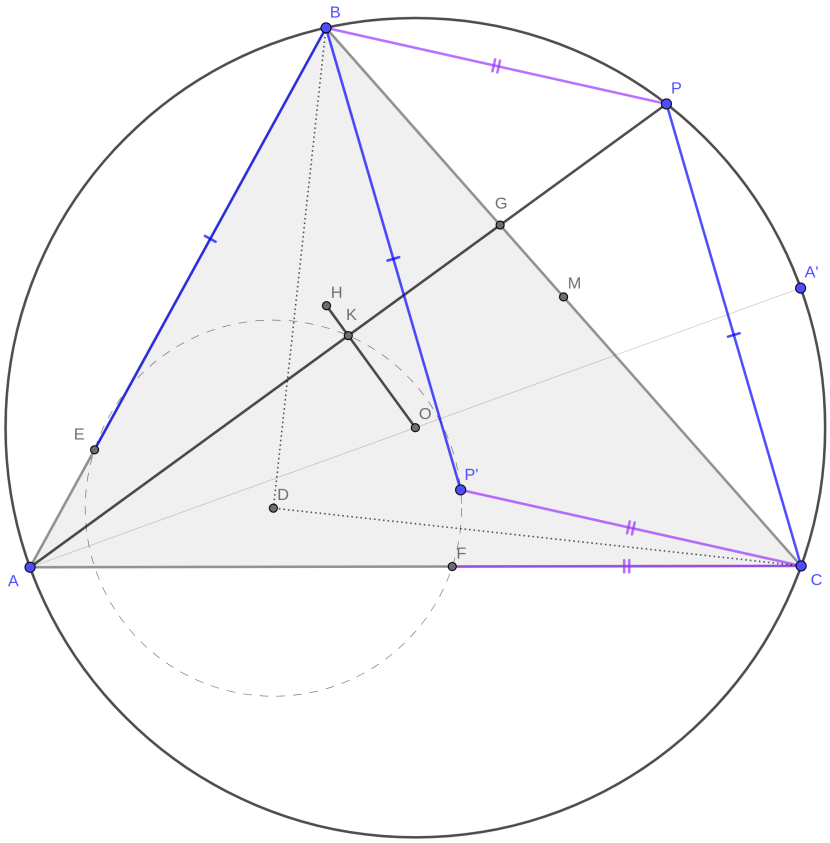
2. Tegul O ir H yra atitinkamai trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras ir aukštinių susikirtimo taškas. Taškas P yra taško A atspindys tiesės OH atžvilgiu. Tarkime, kad P nėra toje pačioje tiesės BC pusėje kaip A. Taškai E ir F yra atitinkamai ant AB ir AC, kad $BE = PC$ ir $CF = PB$. Tegul K yra tiesių AP ir OH susikirtimo taškas. Įrodykite, kad $\angle EKF = 90^\circ$.

Sprendimas:

(a) Pažymėkime taip P', kad $BPCP'$ yra lygiagretainis. Tegul taškas D yra EBP' ir $P'CF$ pusiaukampinių susikirtimo taškas. Pažymėkime taip A', kad AA' yra skersmuo. M yra BC vidurio taškas.

(b) Įrodysime, kad P' priklauso tiesei HO. Žinome, kad $PM = MP'$ ir $HM = MA'$ (antra lygybė yra gerai žinomas faktas). Tada $HPA'P'$ yra lygiagretainis. Tada $HO \parallel PA'$ ir $HP' \parallel PA' \implies P'$ priklauso tiesei HO.

(c) Įrodysime, kad $\angle BDC = 90^\circ$: Pastebėkime, kad $\angle DBC + \angle DCB = \frac{\angle B + \angle P'BC}{2} + \frac{\angle C + \angle P'CB}{2} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90^\circ \implies \angle BDC = 90^\circ$



(d) Įrodysime, kad $\angle EP'F = 90°$ ir D yra EF vidurio taškas. $EP' \perp BD$ ir $CD \perp P'F$ ir $\angle BDC = 90° \implies \angle EP'F = 90°$. Kadangi $DE = DP'$ ir $DP' = DF \implies D$ yra apie $EP'F$ apibrėžto apskritimo centras ir D yra EF vidurio taškas.

(e) Įrodysime, kad $DM \parallel AG$. Pastebėkime, kad $\angle DMB = 2\angle DCB = 2(\angle P'CB + \angle DCF) = 2\left(\alpha + \frac{\angle C - \alpha}{2}\right) = \alpha + \angle C = \alpha + \angle APB = \angle AGB$, kur $\angle PBC = \alpha \implies DM \parallel AG$.

(f) Įrodysime, kad $\angle EP'F = 90°$. Kadangi $PM = MP'$ ir $DM \parallel AG \implies K$ yra P' atspindys DM atžvilgiu $\implies DK = DP' \implies K$ priklauso apie $EP'F$ apibrėžtam apskritimui ir $\angle EKF = \angle EP'F = 90°$.

3. Ant lentos kažkokia tvarka surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2025 (kiekvienas skaičius parašytas po lygiai vieną kartą). Barbora daro tokius veiksmus: jei pirmasis ant lentos parašytas skaičius yra k, ji nutrina

pirmuosius k skaičių, tada tuos pačius skaičius atvirkščia tvarka parašo lentos pradžioje, o likusių narių eilės tvarkos nekeičia. (Pavyzdžiui, seka $\{3, 5, 10, 4, ...\}$ tampa $\{10, 5, 3, 4, ...\}$). Įrodykite, kad po baigtinio ėjimų skaičiaus pirmasis ant lentos parašytas skaičius bus 1.

Sprendimas: Pakeiskime 2025 į n ir įrodysime indukcijos būdu. Kai $n = 1$, sąlyga akivaizdi. Dabar tarkime, kad sąlyga teisinga su n ir turime ant lentos parašytus $n + 1$ skaičius.

Jei $n + 1$ parašytas pačiame gale, tai su juo niekada nebus atliekama jokių veiksmų, tad veiksmai bus identiški, tarsi turėtume tik n skaičių, taigi, iš indukcijos žingsnio, kažkada priekyje atsiras 1.

Jei $n + 1$ parašytas ne pačiame gale, tai jei jis kažkada atsidurtų pačiame priekyje, kitu ėjimu nueitų į patį galą ir vėl turėtume prieš tai buvusią situaciją. Vadinasi, $n + 1$ niekada nebus priekyje. Tarkime, pačiame gale yra skaičius x. Bet tada, kada $n+1$ niekada nebus priekyje, tai x niekada nebus liečiamas. Taigi veiksmai bus identiški tiems, tarsi x ir $n + 1$ būtų sukeisti vietomis, o tai jau analogiškai situacijai, kai turime n skaičių.

Atskirai reikia panagrinėti atvejį, kai $x = 1$. Bet tokiu atveju galime įsivaizduoti, kad vietoje $n + 1$ turime 1 ir ėjimų tai visiškai nekeičia, nes jau teigėme, kad $n + 1$ niekada nebus priekyje. Tokiu atveju pagal indukcijos žingsnį 1 (o iš tiesų $n + 1$) pateks į pirmą vietą ir kitu ėjimu vienetas atsiras priekyje.

Taigi bet kurioje situacijoje po baigtinių ėjimų skaičiaus priekyje atsiras 1.

4. Raskite visus teigiamus racionaliuosius (x, y), tenkinančius lygtį:

$$yx^y = y + 1.$$

Sprendimas:

Tegu $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, kur šios trupmenos nesuprastinamos. Lygtį galime pertvarkyti taip: $c^d a^c = b^c(c+d)^d$. Kadangi $dbd(c, c+d) = 1, dbd(a, b) = 1$, gauname, kad $a^c = (c + d)^d, c^d = b^c$. Iš antrosios lygties gauname, kad egzistuoja toks $m \in \mathbb{N}$, kad $c = m^c, b = m^d$.

Jei $c = m^c$, tai jei $c > 1$, tada $c = m^c = m^{m^c} = ...$ būtų neaprėžtas, taigi belieka atvejis $m = c = 1$.

Jei $m = c = 1, b = 1, a = (d+1)^d$. Nesunku patikrinti, kad $x = (d+1)^d, y = \frac{1}{d}$ yra sprendinys.