

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

VI. SVĖRIMAI IR PILSTYMAI

(2024–2026)

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė doc. Romualdas Kašuba

Svėrimo ir pilstymo uždaviniai visada arba dažniausiai patinka tiems, kurie turi nors kiek daugiau laiko pagalvoti, arba kuriems tiesiog sekasi aiškiau galvoti, arba kam stačiai patinka spręsti.

Tai loginių uždavinių porūšis su gana aiškiai nusakytu tikslu ir paprastai gana aiškiomis priemonėmis – indais arba svarstyklėmis – tam tikslui pasiekti. Kaip ir kai kuriuose kituose loginiuose uždaviniuose, tikslas neretai pasiekiamas nelabai lengvai, bet paprastai suradus tinkamą sprendimą arba bent supratęs tinkamą sprendimo būdą, abejonių, ar viskas čia gerai, beveik nebelieka.

Kaip nereti kiti loginiai uždaviniai jie buvo ir yra labai paplitę ir yra žinomi kone nuo neatmenamų laikų. Daug kam patinka dar ir tai, kad tokios rūšies uždaviniams spręsti nereikia jokių specialių žinių ir neprireikia net kvadratinės lygties šaknų radimo formulių, o gana vien tik sugebėjimo nors kiek aiškiau ar logiškiau mąstyti, o tą gebėjimą, panašiai kaip ir kitus siektinus įgūdžius, geriausiai vystyti kasdienėmis nuolatinėmis pastangomis.

Vienas pačių pirmųjų paprastųjų galvosenos, susijusios su svėrimais, pavyzdžių galėtų būti susigaudymas, kas darytina tokiu atveju.

1. Turime **sugedusias** svirtines svarstyklas, didelį maišą cukraus ir 1 kilogramo svarelį. Kaip mums elgtis, jeigu mes norime (tik tiek teturėdami) at(si)sverti 1 kg cukraus?

Sprendimas. Turime ne labai daug ką ir kai mes mąstome, kaip mes galėtume pradėti, tai beveik nieko geriau negalime sugalvoti, kaip tik kad ant vienos svarstyklių lėkštutės ir dėti tą 1 kg svarelį, o ant kitos svarstyklių lėkštutės dėti ką begalėtume? Ant tos kitos svarstyklių lėkštutės sunku būtų sugalvoti ką nors geresnio kaip tik kad pilti tiek cukraus iš to didelio maišo, kad svarstyklės būtų pusiausvyroje. O ką daryti toliau? Toliau gali gana greit ateiti į galvą, kad būtų galima nuimti tą 1 kg svarelį ir į jo vietą iš to paties didelio maišo pilti tiek cukraus, kad svarstyklės vėl būtų pusiausvyroje. Taip mes ir atsisvertume (dviem veiksmais) tą norimą 1 kg cukraus.

2. Maišelyje yra 9 kilogramai razinų. Kaip turėdami svirtines svarstyklas (su lėkštutėmis) ir vieną 200 gramų masės svarelį mes galėtume trimis svėrimais atsisverti lygiai 2 kg razinų?

Sprendimas. Jeigu nebijotume arba galėtume ilgai svėrinėti, tai atsakymas galėtų būti toks: atsverkime 10 kartų po 200 gramų razinų ir taip darydami (pamažu) ir susirinksime tuos 2000 gramų – o tai ir yra tie trokštami 2 kilogramai. Užtektų 10 mažų „pasvėrinėjimų“. Kaip sakoma, lašas po lašo ir akmenį pratašo (arba du kilogramus razinų pasveria).

Tačiau jeigu norėtume kiek greičiau, arba trimis svėrimais, tai galėtume elgtis taip: pirmu veiksmu padedame kurioje nors pusėje tą svarelį, o visas razinas išpilstome per abi lėkšteles taip, kad svarstyklės būtų „pusiausviros“; tada vienoje pusėje (ten kur svarelis) bus 4 kilogramai ir 400 gramų, o kitoje – 4 kilogramai 600 gramų razinų.

Nupilkime kur nors tuos 4 kilogramus su 400 gramų ir pasilikime tą pusę su 4 kilogramais 600 gramų. Juos išdalinkime (tai jau antrasis veiksmas), kad jie būtų per abi lėkštutes vėl pusiausvyroje kartu su 200 gramų svareliu vienoje kurioje nors pusėje. Po antrojo veiksmo bus atsverta vienoje vietoje 2 kilogramai 200 gramų, o kitoje – 2 kilogramai 400 gramų razinų. Trečiuoju veiksmu iš tos krūvos, kurioje yra 2 kilogramai 200 gramų reikia paimti tiek razinų, kurios atsvertų kitoje svarstyklių pusėje esantį vienišą 200 gramų svarelį. Tai padarius ten, kur ką tik buvo 2 kilogramai 200 gramų razinų, jų ten bus likę lygiai 2 kilogramai.

Tai ir yra tai, ko mums reikia.

Atsakymas. 2 kilogramus razinų tikrai galima atsverti trimis svėrimais.

3. Jonas, Andrius ir Justinas nori trimis sunkvežimiais pervežti 7 pilnas statines, 7 statines pripiltas iki pusės ir dar 7 tuščias statines, kad visuose sunkvežimiuose būtų vienodos masės kroviny. Pastebėsime, kad visos tuščios statinės yra vienodos formos ir vienodos masės.

Sprendimas. Jonas į savo sunkvežimą galėtų krauti 3 pilnas statines, vieną pripiltą iki pusės ir pridėti dar 3 visai tuščias statines, Andrius galėtų atkartoti Jono veiksmus, tai yra, į savo sunkvežimą krauti irgi 3 pilnas statines, ketvirtą pusiau pilną ir dar pridėti 3 tuščias statines, na o Justinas į savo sunkvežimą susikrautų tai, kas dar ten liko nesukrauta. O liko nesukrauta 1 pilna statinė, 5 pripiltos iki pusės ir dar 1 tuščia statinė. Nesunku susekti, kad visuose sunkvežimiuose esantis krovinys yra tikrai vienodos masės.

4. Zuikis (Z) yra 3 kilogramais sunkesnis už triušį (T). Kiek sveria vienas toks zuikis, jeigu 2 tokie patys zuikiai sveria tiek pat, kiek ir 5 tokie patys triušiai? Kiek sveria vienas toks triušis?

Sprendimas. Tai, kas pasakyta sąlygoje, galima užrašyti taip:

$$Z = T + 3 \quad \text{ir} \quad 2Z = 5T.$$

Tada 2 zuikiai sveria tiek pat kiek 2 triušiai ir dar 6 kilogramai arba iš kitos lygybės, tiek pat, kiek ir 5 triušiai. Taigi 2 triušiai ir dar 6 kilogramai sveria tiek pat kiek 5 triušiai, todėl 3 triušiai sveria 6 kilogramus, arba tai yra tas pats, kad vienas triušis sveria 2 kg. Todėl 1 zuikis sveria $2 + 3 = 5$ kilogramus.

Atsakymas. Vienas zuikis sveria 5 kg, o vienas triušis – 2 kg.

5. Dešimties litrų indas yra pilnas pripiltas vandens. Kaip iš jo turint 7 ir 3 litrų (tuščius) indus atmatuoti 5 litrus vandens?

Sprendimas. Iš sąlygos žinome, kad dešimties litrų indas yra pilnas, o 7 ir 3 litrų indai yra, kaip pasakyta, tušti. Tada pradinę tų indų būseną galime apibūdinti atitinkamai skaičių (10, 0, 0) trejetu. Po to, pilstydami skystį iš vienos talpos į kitą gauname naujas būsenas ir jas taip pat užrašome atitinkamais skaičių trejetais. Pilstymus tęsime tol, kol gausime atsakymą tai yra tol, kol (kaip mūsų atveju) viename kuriame nors inde nepasirodys skaičius 5.

Atsakymas. Taigi mes matome, kad antrajame 7 litrų talpos inde pasirodo esą įpilti 5 litrai skysčio.

10	0	0
3	7	0
3	4	3
6	4	0
6	1	3
9	1	0
9	0	1
2	7	1
2	5	3

6. Devynių (vienodos masės) rutuliukų Rut masė yra tokia pati kaip ir dviejų vienodų kubelių Ku ir dviejų vienodų rutulių Ri masė. Ritulys yra du kartus lengvesnis už kubelį. Kiek rutuliukų reikėtų paimti, kad jų masė būtų lygi vieno kubelio masei?

Sprendimas. Užrašę tai, kas pasakyta sąlygoje kaip $9Rut = 2Ku + 2Ri$ ir $2Ri = Ku$ ir įrašę antrąją lygybę į pirmąją gauname, kad $9Rut = 3Ku$. Dabar suprastinę gautąją lygybę iš trijų gausime, kad $3Rut = Ku$, o tai ir reiškia, kad vienas kubelis atsveria tris rutuliukus.

Atsakymas. Vienas kubelis atsveria 3 rutuliukus.

7. Dešimt (vienodos masės) apelsinų (A) sveria vienu kilogramu daugiau negu dvidešimt (vienodų) mandarinų (M). Tie patys dešimt apelsinų sveria 500 gramų daugiau negu 30 tokių pat (vienodų) mandarinų. Kiek sveria 1 mandarinas?

Sprendimas. Užrašę tai, kas pasakyta sąlygoje, kaip $10A = 20M + 1$ ir $10A = 30M + 0,5$ turime lygybę $20M + 1 = 30M + 0,5$ arba $1 - 0,5 = 0,5 = 10M$. Tai reiškia, kad $M = 0,05$ arba kad 1 mandarinas sveria 50 gramų.

Atsakymas. Vienas mandarinas sveria 50 gramų.

8. Yra du stiklainiai – vienas 5-litrinis, o kitas 3-litrinis. Kaip turint juos būtų galima į 10-litrų talpos kibirą įpilti 4 litrus vandens? (Vandenį galima perpylinėti iš vienos talpos į kitą, įpylinėti iš krano arba iššpylinėti lauk.)

Sprendimas. Pradžioje laikysime, kad visos trys talpos yra tuščios. Tokią būseną atitinka skaičių trejetas (0, 0, 0). Priklausomai nuo to, kokius veiksmus atlikinėsime (perpylimas, įpylimas iš krano arba iššpylimas lauk), galima gauti skirtingus sprendimo būdus. Nurodysime vieną iš jų (žr. lentelę).

Pastaba. Čia naudojamas perpylimas, iššpylimas lauk ir įpylimas iš krano.

5 litrų indas	3 litrų indas	10 litrų indas
0	0	0
5	0	0
2	3	0
0	3	2
0	0	2
5	0	2
2	3	2
0	3	4

9. Iš devynių vienodų monetų viena pasirodė esanti brokuota, nes ji svėrė mažiau negu likusios monetos. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir padarius ne daugiau kaip du svėrimus galima būtų atrasti tą netikrą monetą?

Sprendimas. Padaliname tas 9 monetas bet kaip į 3 grupes po 3 monetas kiekvienoje grupėje ir lyginame tarpusavyje kiekvienos grupės masę.

1 svėrimas. Iš trijų monetų grupių nustatome tą grupę, kuriai priklauso netikra moneta. Tam mes į kiekvieną iš dviejų svarstyklių lėkštučių dedame bet kurią iš trijų monetų grupių. Grupė, kuriai priklauso netikra moneta, sveria mažiau negu kitos trijų monetų grupės arba likę monetų trejetai. Jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai mes darome išvadą, kad netikra moneta yra trečiojoje (dar nesvertoje) grupėje. Taigi trejetas, kuriame yra netikra moneta, yra nustatomas vienu svėrimu.

2 svėrimas. Iš monetų su netikra moneta trejeto randame netikrą monetą. Ant kiekvienos svarstyklių lėkštutės dedame po vieną monetą. Netikra moneta, kaip žinome, yra lengvesnė. O jeigu svarstyklės pasirodo esančios pusiausvyroje, tai netikra yra toji likusi trečioji trejeto moneta.

10. Iš 27 vienodų kilograminių svarelių vienas pasirodė esąs brokuotas, nes jis svėrė daugiau negu vieną kilogramą. Kaip surasti tą svarelį, turint tik svirtines svarstyklas ir atliekant ne daugiau kaip tris svėrimus?

Sprendimas. Tuos 27 svarelius bet kaip padalijame į 3 grupes po 9 svarelius kiekvienoje grupėje ir su svirtinėmis svarstyklėmis palyginame bet kurių dviejų svarelių grupių po 9 svarelius masę. Grupė, kuriai priklauso netikras svarelis, sveria daugiau negu kiti svarelių devynetai. O jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai darome išvadą, kad netikras svarelis yra trečiajame (dar nebuvusiam ant svarstyklių) svarelių devynete. Taigi devynetas, kuriame yra netikras svarelis, yra nustatomas jau pačiu pirmuoju svėrimu.

Dabar tą devynetą, kuriame yra brokuotas netikras svarelis bet koku būdu padaliname į tris trejetus ir pirmuosius du trejetus dedame ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštučių. Trejetas, kuriam priklauso netikras brokuotas svarelis, sveria daugiau negu kiti svarelių trejetai. O jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai darome išvadą, kad netikras svarelis yra trečiame dabar ką tik ant svarstyklių dar nebuvusiam svarelių trejete). Taigi trejetas, kuriame yra netikras svarelis, yra nustatytas antruoju svėrimu.

Insime tą trejetą, kuriame, kaip nustatėme, yra netikras svarelis, ir trečiuoju svėrimu surasime, kuris gi yra tas netikrasis. Tam tikslui insime bet kuriuos du svarelius ir uždėsime juos ant skirtingų svarstyklių lėkštučių. Jeigu svarstyklės nėra pusiausvyroje, tai netikras svarelis yra tas, kuris yra aukštyr pakilusioje lėkštutėje, o jeigu svarstyklės rodo pusiausvyrą, tai netikras yra tas ką tik svėrimo išvengęs svarelis.

11. Turime 10 arbūzų ir dar svarstyklas, su kuriomis vienu svėrimu galime nustatyti bet kurių pasirinktų trijų arbūzų masę. Kaip šešiais svėrimais galima būtų nustatyti bendrą visų dešimties arbūzų masę?

Sprendimas. Sunumeruokime arbūzus sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 10 ir pirmuoju svėrimu pasverkime tris pirmuosius arbūzus 1, 2 ir 3, o antruoju svėrimu – sekančius tris arbūzus 4, 5 ir 6. Mums dar liko sužinoti bendrą likusių paskutiniųjų keturių arbūzų 7, 8, 9 ir 10 masę. Trečiuoju svėrimu pasverkime tris arbūzus 8, 9 ir 10, ketvirtuoju – 7, 9 ir 10, penktuoju – 7, 8 ir 10 ir šeštuoju sužinokime bendrą trijų arbūzų 7, 8 ir 9 masę. Tegul tie svoriai yra atitinkamai C, D, E ir F. Kadangi tuose paskutiniuosiuose keturiuose svėrimuose dalyvavo tik paskutinieji keturi arbūzai ir kiekvienas iš jų buvo sveriamas lygiai po 3 kartus, todėl bendra jų masė yra lygi

$$(C + D + E + F)/3,$$

o tada bendra visų 10 arbūzų masė yra

$$A + B + (C + D + E + F)/3.$$

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Dėžėje yra 24 kg vinių. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir rodyklių atmatuoti lygiai 9 kilogramus vinių?
2. 4 vienodos konservų dėžutės ir 3 vienodi kepaliukai duonos sveria 5 kilogramus, o tos pačios 4 vienodos konservų dėžutės ir 2 vienodi kepaliukai duonos sveria 4 kilogramus. Kiek sveria 1 kepaliukas duonos ir kiek sveria 1 konservų dėžutė?
3. Antanukui padovanojo svarstyklės, ir jis nedelsdamas pradėjo svėrinėti savo žaisliukus. Jo mašinėlę atsvėrė kamuoliukas ir 2 kubeliai, o mašinėlę su kubeliu – 2 kamuoliukai. Kiek kubelių atsvėrė 1 mašinėlę? Visi Antanuko kamuoliukai ir visi Antanuko kubeliai yra vienodi.
4. Turime 11 arbūzų ir dar svarstyklės, su kuriomis vienu svėrimu galime nustatyti bet kurių pasirinktų trijų arbūzų bendrą masę. Kaip šešiais svėrimais galima būtų nustatyti bendrą visų vienuolikos arbūzų masę?
5. Pasišaukė pamotė Pelenę ir tarė jai: „Į du mūsų kibirus telpa 5 ir 9 litrai vandens. Paėmusi juos atnešk iš upės lygiai 3 litrus vandens.“ Lentele pateikite Pelenės užduoties atlikimo būdą.
6. Ar galima 50 litrų benzino išpilstyti per tris bakus taip, kad pirmame bake būtų 10 litrų daugiau benzino negu antrame bake, o perpylus 26 litrus benzino iš pirmojo bako į trečiąjį, trečiajame bake būtų tiek pat benzino, kiek jo yra antrajame bake? Atsakymą paaiškinkite.
7. Dvylikos litrų talpos indas yra sklidinai pripiltas pieno. Kaip būtų galima šį pieną padalinti po lygiai dviem pirkėjams, naudojantis dviem tuščiomis talpomis, viena iš kurių yra 8, o kita 3 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentelė.
8. Yra trys indai, kurių talpa yra 8 litrai, 5 litrai ir 3 litrai. 8 litrų indas yra sklidinai pripiltas vandens. Kaip perpilti vandenį į du iš trijų turimų indų, kad kiekviename iš jų būtų po 4 litrus vandens? Sprendimą pateikite lentelė.
9. Kaip turint dvi pilnas 10-ties litrų talpas su pienu, atmatuoti po 2 litrus pieno į dvi tuščias talpas, iš kurių viena yra 4, o kita 5 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentelė.
10. Turime 79 vienodas monetas, iš kurių viena yra netikra ir lengvesnė už kitas. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir padarius daugių daugiausiai 4 svėrimus surasti tą netikrą monetą?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2025 m. gruodžio 5 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA