XXIV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ IR 7–8 KLASIŲ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Užduotys ir sprendimai

Aivaras Novikas

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2024 m. rugsėjo 21 d.

Atsakymų lentelė pateikta paskutiniame puslapyje.

1 (5–6 kl.). Kiekvienas rutulys dėžėje yra raudonas arba žalias. Tarp bet kurių 11 rutulių dėžėje yra mažiausiai du žali, o tarp bet kurių 12 rutulių dėžėje – mažiausiai keturi raudoni. Kiek daugiausiai rutulių gali būti dėžėje?

A) 15 **B)** 17 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 23

Sprendimas. Raudonų ir žalių rutulių skaičių dėžėje atitinkamai pažymėkime r ir z.

Įsitikinkime, kad $r + z \leqslant 17$. Galime tarti, kad $r + z \geqslant 12$. Tarp bet kurių 11 rutulių dėžėje yra daugiausiai $11 - 2 = 9$ raudoni, todėl $r \leqslant 9$. Analogiškai $z \leqslant 12 - 4 = 8$. Taigi $r + z \leqslant 9 + 8 = 17$.

Kita vertus, gali būti, kad dėžėje yra $r = 9$ raudoni ir $z = 8$ žali rutuliai. Tada tarp bet kurių 11 rutulių dėžėje yra mažiausiai $11 - r = 2$ žali, o tarp bet kurių 12 rutulių – mažiausiai $12 - z = 4$ raudoni.

Vadinasi, didžiausias galimas rutulių skaičius dėžėje lygus 17.

Ats.: **B)** 17.

2 (5–6 kl.). Viltė natūralųjį triženklį skaičių a padaugino iš 3. Jos gauto rezultato visi skaitmenys lyginiai. Kokia yra skaičiaus a didžiausios ir mažiausios galimų reikšmių visų šešių skaitmenų suma?

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

Sprendimas. Skaičius a yra tarp skaičių 100 ir 999, todėl skaičius $3a$ yra ne mažesnis už 300, bet mažesnis už 3000. Skaičiaus $3a$ visi skaitmenys lyginiai, todėl jis yra ne mažesnis už 400, bet ne didesnis už 2888. Be to, skaičius $3a$ dalijasi iš 3, todėl jo skaitmenų suma dalijasi iš 3. Vadinasi,

$$402 \leqslant 3a \leqslant 2886, \qquad 134 \leqslant a \leqslant 962.$$

Reikšmės $a = 134$ ir $a = 962$ tenkina uždavinio sąlygą, tad jos ir yra ieškomos mažiausia bei didžiausia a reikšmės. Jų skaitmenų suma lygi $1 + 3 + 4 + 9 + 6 + 2 = 25$.

Ats.: **D)** 25.

3 (5–6 kl.). Šachmatų turnyre dalyvavo penki žaidėjai. Kiekviena žaidėjų pora sužaidė po vieną partiją. Partijai pasibaigus lygiosiomis, abiem žaidėjams skiriama po pusę taško. Priešingu atveju partijos laimėtojui skiriamas taškas, o pralaimėtojui 0 taškų. Lygiai pusė visų partijų baigėsi lygiosiomis. Vienas žaidėjas pralaimėjo visas žaistas partijas. Kiek taškų surinko žaidėjas, turnyre užėmęs priešpaskutinę vietą?

A) 1 **B)** 1,5 **C)** 2 **D)** 2,5 **E)** Vienareikšmiškai nustatyti neįmanoma

Sprendimas. Iš viso sužaista $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ šachmatų partijų. Penkios iš jų baigėsi lygiosiomis, o kitos penkios – vieno iš žaidėjų laimėjimu. Visas savo partijas pralaimėjusį žaidėją pažymėkime A. Jis surinko 0 taškų ir užėmė paskutinę vietą. Žaidėjas A sužaidė 4 partijas, ir nė viena iš jų nesibaigė lygiosiomis. Likusią, penktąją tokią partiją žaidė kiti du žaidėjai. Šios partijos pralaimėtoją pažymėkime B, o laimėtoją – C. Likusius du žaidėjus pažymėkime D ir E. Tada B, C, D, E, žaisdami su A, gavo po tašką, o C dar gavo tašką, žaisdamas su B. Likusios penkios partijos ($B - D$, $B - E$, $C - D$, $C - E$ ir $D - E$) baigėsi lygiosiomis, kiekvienam iš

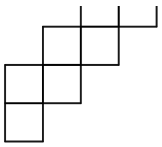
dviejų žaidėjų gavus po pusę taško. Vadinasi, atitinkami žaidėjai iš viso surinko po tiek taškų:

$$x_A = 0, \qquad x_B = 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2, \qquad x_C = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3, \qquad x_D = x_E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Priešpaskutinę vietą užėmė B, surinkęs $x_B = 2$ taškus.

Ats.: **C)** 2.

4 (5–6 kl.). Iš 2024 vienodų kvadratinių langelių „laipteliai“ sudėlioti, kaip parodyta paveikslėlyje. Gautosios „laiptelių“ figūros kraštu ropoja skruzdėlė. Kiek centimetrų nuropos skruzdėlė, kol grįš į pradinį tašką (niekada neapsigręždama), jei kiekvieno langelio kraštinės ilgis lygus 1 cm?



Sprendimas. (Taip pat žr. 7–8 kl. 3 uždavinį ir jo sprendimą.)

„Laiptelius“ sudaro dvi įstrižos langelių eilės po $2024 : 2 = 1012$ langelių. Skruzdėlės trajektoriją sudaro po dvi kiekvieno langelio kraštines (apatinė ir dešinioji langelio kraštinės, jei jis apatinėje įstrižoje eilėje, bei viršutinė ir kairioji kraštinės – jei viršutinėje) ir dar dvi kraštinės – apatinio langelio kairioji bei viršutinio langelio dešinioji. Gauname

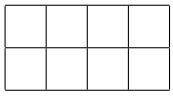
$$1012 \cdot 2 + 1012 \cdot 2 + 2 = 4050$$

kraštinių, kurių bendras ilgis – „laiptelių“ perimetras bei skruzdėlės nueinamas atstumas – yra 4050 cm.

Ats.: 4050.

5 (5–6 kl.). Iš 8 vienodų kvadratėlių sudarytas 2×4 stačiakampis. Kiek yra trikampių, kurių visos trys viršūnės sutampa su kvadratėlių viršūnėmis?

Sprendimas. Kvadratėlių viršūnės sudaro tris (horizontalias) eiles po 5 taškus:



Kad gautume trikampį, turime pasirinkti tris kvadratėlių viršūnes, nesančias vienoje tiesėje (taigi nesančias vienoje eilėje). Galimi du atvejai: arba dvi reikiamo trikampio viršūnės yra vienoje eilėje, o trečia – bet kurioje iš kitų dviejų, arba trikampio viršūnės yra trijose skirtingose eilėse. Pirmuoju atveju tinka visi viršūnių trejetai. Yra 3 galimybės pasirinkti eilę, kurioje bus dvi trikampio viršūnės; tada yra 10 galimybių pasirinkti dvi viršūnes toje eilėje; jas pasirinkus, yra 10 galimybių pasirinkti likusią trikampio viršūnę kitose dviejose eilėse. Gauname $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$ trikampių. Antruoju atveju yra $5^3 = 125$ viršūnių trejetai, tačiau kai kuriuos reikia atmesti: yra 5 viršūnių trejetai, esantys vertikaliose atkarpose, ir dar 8 viršūnių trejetai, kai trys viršūnės yra vienoje tiesėje (juos paveikslėlyje galima perrinkti tiesiogiai). Gauname dar $125 - 5 - 8 = 112$ trikampių. Vadinasi, iš viso yra $300 + 112 = 412$ tinkamų trikampių.

Ats.: 412.

6 (5–6 kl.). Atėjęs į mokyklą, Arnas norėjo prieš pamoką pasisveikinti su visais savo bendraklasiais. Tačiau su visais pasisveikinti nespėjo. Arno bendraklasiai, su kuriais jis nepasisveikino, sudaro ketvirtadalį visų tos klasės mokinių. Arno bendraklasė Jurga, su kuria jis nepasisveikino, pati prieš pamoką pasisveikino su septintadaliu tų mokinių, su kuriais pasisveikino Arnas. Kiek mokinių yra klasėje, jei žinoma, kad jų yra mažiau nei 30?

Sprendimas. Arnas nepasisveikino su ketvirtadaliu visų klasės mokinių. Todėl klasės mokinių skaičius dalijasi iš 4. Pažymėkime jį $4n$. Kadangi $4n < 30$, tai $n = 1, 2, \ldots, 7$. Arnas nepasisveikino su n mokinių ir, žinoma, su savimi, todėl jis pasisveikino su $4n - n - 1 = 3n - 1$ mokinių. Jurga pasisveikino su septintadaliu šių mokinių, todėl $3n - 1$ dalijasi iš 7. Tinka tik $n = 5$. Vadinasi, klasėje yra 20 mokinių.

Ats.: 20.

7 (5–6 kl.). Teigiamiems skaičiams a, b, c galioja lygybės $a \cdot b = 24$, $b \cdot c = 55{,}5$, $c \cdot a = x$. Skaičius b yra natūralusis. Nustatykite visas galimas natūraliąsias skaičiaus x reikšmes.

Sprendimas. Išreikškime x per b^2:

$$ab \cdot bc = ab^2c = 24 \cdot 55{,}5 = 12 \cdot 111 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37, \qquad x = ac = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 37}{b^2}.$$

Jei skaičius x natūralusis, tai skaičius b^2 yra skaičiaus $2^2 \cdot 3^2 \cdot 37$ daliklis ir tuo pat metu – natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tinka tik $b = 6$, 3, 2 arba 1. Atitinkamai $x = 37$, $2^2 \cdot 37 = 148$, $3^2 \cdot 37 = 333$ ir $2^2 \cdot 3^2 \cdot 37 = 1332$. Kiekvienu iš keturių atvejų egzistuoja ir tinkamos reikšmės $a = 24 : b$ bei $c = 55{,}5 : b$, kurioms $ab = 24$, $bc = 55{,}5$ ir $ac = \frac{24 \cdot 55{,}5}{b \cdot b} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 37}{b^2} = x$.

Ats.: 37, 148, 333, 1332.

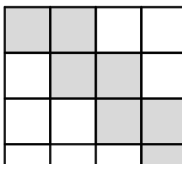
1 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 2 uždavinį.

2 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 3 uždavinį.

3 (7–8 kl.). Iš $n^2 + n$ vienetinių kvadratinių langelių sudaryta $n \times (n + 1)$ lenta. Lentoje nuspalvinti visi langeliai, sudarantys dvi įstrižaines: vieną, išeinančią iš kairiojo viršutinio langelio (einančią žemyn ir dešinėn), bei kitą, išeinančią iš dešiniojo apatinio langelio (einančią aukštyn ir kairėn). Gautosios nuspalvintos figūros perimetro paskutinis skaitmuo yra 0. Kuris iš penkių duotųjų skaičių gali būti lygus šios figūros plotui?

A) 5432 **B)** 3456 **C)** 8765 **D)** 5678 **E)** 7654

Sprendimas. (Taip pat žr. 5–6 kl. 4 uždavinį ir jo sprendimą.)



Galime tarti, kad lentos horizontalios kraštinės ilgesnės už vertikalias: priešingu atveju nuspalvinta figūra būtų tos pačios formos ir dydžio. Figūrą sudarančiose lentos įstrižainėse yra po n langelių, taigi jos plotas lygus $2n$. Figūros kraštą sudaro kai kurios nuspalvintų langelių kraštinės: po dvi kiekvieno langelio kraštines (apatinė ir kairioji langelio kraštinės, jei jis kairiojoje įstrižainėje, bei viršutinė ir dešinioji kraštinės – jei dešiniojoje) ir dar dvi kraštinės (kairiausio langelio viršutinė bei dešiniausio langelio apatinė). Iš viso gauname

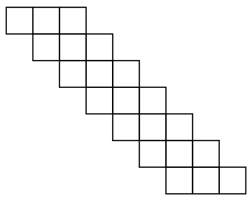
$$2n + 2n + 2 = 4n + 2$$

kraštines, tad toks ir yra figūros perimetras.

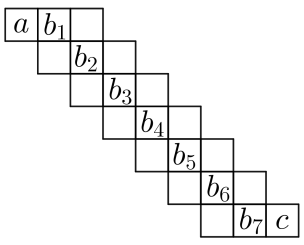
Kadangi $4n + 2 = \ldots 0$, tai $4n = \ldots 8$, o figūros plotas $2n = \ldots 8 : 2$ baigiasi skaitmeniu 4 arba 9 (pastarąjį skaitmenį galime atmesti, nes skaičius $2n$ lyginis). Tarp duotųjų penkių atsakymų tėra vienas tinkamas skaičius 7654 (baigiasi skaitmeniu 4). Jis išties galimas, kai $n = 3827$: tada figūros perimetras lygus $4n + 2 = 15310$.

Ats.: **E)** 7654.

4 (7–8 kl.). Paveikslėlyje pavaizduotos figūros langeliuose įrašyta po vieną iš skaičių 1, 2, 3, …, 21. Jokie du įrašyti skaičiai nėra lygūs. Bet kuriems dviem skaičiams, esantiems vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, didesnis yra tas iš jų, kuris figūroje yra atitinkamai dešiniau arba žemiau nei kitas. Kiek yra tokių figūros langelių užpildymų skaičiais?



Sprendimas. Pažymėkime įrašytuosius skaičius, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia skaičius a mažesnis ne tik už skaičių b_1, bet (toliau einant langeliais dešinėn ir žemyn) ir už bet kurį iš likusių įrašytųjų skaičių, todėl $a = 1$. Analogiškai $b_1 = 2$, $c = 21$ ir $b_7 = 20$. Skaičius b_2 didesnis už keturis skaičius, esančius aukščiau ir kairiau nei jis, bet mažesnis už likusius 16 skaičių, todėl $b_2 = 5$. Analogiškai $b_3 = 8$, $b_4 = 11$, $b_5 = 14$ ir $b_6 = 17$.



Liko išsiaiškinti, kokie skaičiai gali būti langeliuose, kurių nepažymėjome raidėmis. Dviejuose langeliuose tarp $b_1 = 2$ ir $b_2 = 5$ turi būti skaičiai 3 ir 4. Jie gali būti įrašyti bet kokia tvarka. Tarp skaičių b_2 ir b_3 bet kokia tvarka reikia įrašyti skaičius 6 ir 7. Analogišką išvadą gauname skaičių poroms (9, 10), (12, 13), (15, 16), (18, 19). Kiekviena iš 6 skaičių porų gali būti įrašyta dviem būdais, todėl gauname $2^6 = 64$ tinkamus langelių užpildymus.

Ats.: 64.

5 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 5 uždavinį.

6 (7–8 kl.). Stačiakampio kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai. Stačiakampio viduje nubrėžus kelias vertikalias ir horizontalias atkarpas, jis padalytas į vienodus kvadratinius langelius, kurių kiekvieno kraštinės ilgis lygus 1. Stačiakampio viduje nubrėžtų horizontalių atkarpų ilgių sumą padidinus 145, gaunama dviguba stačiakampio viduje nubrėžtų vertikalių atkarpų ilgių suma. Koks yra stačiakampio plotas? (Raskite visus variantus.)

Sprendimas. Stačiakampio horizontalių ir vertikalių kraštinių ilgius atitinkamai pažymėkime a ir b. Tada stačiakampio viduje horizontalių ir vertikalių atkarpų atitinkamai yra po $b-1$ ir $a-1$, o jų ilgiai atitinkamai lygūs a ir b. Taigi

$$(b-1)a + 145 = 2(a-1)b,$$
$$ab - a + 145 = 2ab - 2b,$$
$$145 = ab + a - 2b = a(b+1) - 2b,$$
$$143 = 145 - 2 = a(b+1) - 2(b+1) = (a-2)(b+1).$$

Skaičius $143 = 11 \cdot 13$ turi keturis teigiamus daliklius 1, 11, 13, 143. Skaičius $b+1$ lygus vienam iš jų. Be to, $b > 0$, todėl $b + 1 \neq 1$. Vadinasi, $b + 1 = 11$, 13 arba 143. Atitinkamai $a - 2 = 13$, 11 arba 1. Stačiakampio plotas $a \cdot b$ atitinkamai lygus $15 \cdot 10 = 150$, $13 \cdot 12 = 156$ arba $3 \cdot 142 = 426$. Tokie trys stačiakampiai tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 150, 156, 426.

7 (7–8 kl.). Natūralusis skaičius a lygus savo 24 (nebūtinai skirtingų) teigiamų daliklių sumai. Jis taip pat lygus savo 25 (nebūtinai skirtingų) teigiamų daliklių sumai. Nustatykite, ar kiekvienas toks skaičius a lygus ir savo kokių nors 26 (nebūtinai skirtingų) teigiamų daliklių sumai.

Sprendimas. Skaičius a lygus 24 savo daliklių sumai. Jei skaičius a būtų nelyginis, tai ir visi jo dalikliai būtų nelyginiai, o 24 nelyginių skaičių suma a būtų lyginis skaičius. Gavome prieštarą, todėl skaičius a lyginis. Jis lygus 25 savo daliklių sumai. Jei visi šie dalikliai būtų nelyginiai, tai ir jų suma a būtų nelyginis skaičius. Taigi bent vienas iš 25 daliklių sumoje yra lyginis. Vieną tokį daliklį pažymėkime $2b$. Tada ir skaičius b yra skaičiaus a daliklis, o 25 daliklių sumoje vietoj $2b$ parašę $b + b$, gausime skaičiaus a užrašymą 26 teigiamų daliklių suma. Vadinasi, kiekvienas toks skaičius a lygus ne tik 24 ir 25, bet ir 26 savo daliklių sumai.

Ats.: Taip, kiekvienas..

Atsakymai:

5–6 klasės

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
B	D	C	4050	412	20	37, 148, 333, 1332

7–8 klasės

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
D	C	E	64	412	150, 156, 426	Taip