

**XXV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ IR 7–8 KLASIŲ MOKINIŲ
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Užduotys ir sprendimai

Aivaras Novikas

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2025 m. rugsėjo 27 d.

Atsakymų lentelė pateikta paskutiniame puslapyje.

1 (5–6 kl.). Į matematikos stovyklą iš užsienio atvyko 8 mokiniai. Kiekvienas iš jų moka lygiai dvi iš šių trijų kalbų: anglų, prancūzų, vokiečių. Anglų kalbą moka lygiai keturi, o prancūzų – lygiai penki iš 8 mokinių. Keli iš atvykusiųjų mokinių moka vokiečių kalbą?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8**

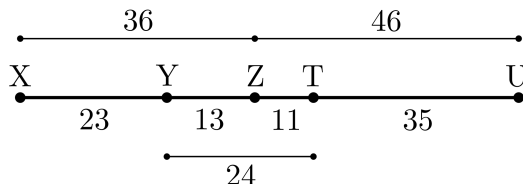
Sprendimas. Užrašę kiekvieno mokinio dvi kalbas, gausime $8 \cdot 2 = 16$ kalbų: anglų kalbą 4 kartus, prancūzų kalbą 5 kartus, o vokiečių kalbą likusius $16 - 4 - 5 = 7$ kartus. Vadinasi, vokiečių kalbą moka 7 mokiniai.

Ats.: **D)** 7.

2 (5–6 kl.). Keliautojas tam tikra tvarka aplankė draugus K, L, M, N, P. Nuo vieno draugo namų iki kito jis **iš eilės** nuėjo 23 km, 13 km, 11 km, 35 km. Tarp apsilankymų pas K ir L jis nuėjo 24 km. Tarp apsilankymų pas M ir N jis nuėjo 10 km daugiau nei tarp apsilankymų pas M ir P. Kiek kilometrų keliautojas nuėjo tarp apsilankymų pas N ir P?

- A) 36 B) 46 C) 47 D) 59 E) 82**

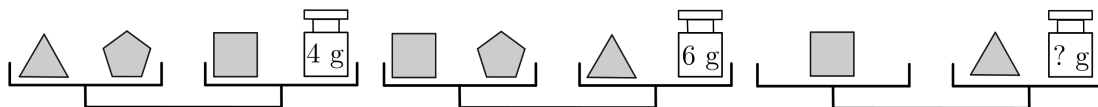
Sprendimas. Tarkime, kad keliautojas iš eilės aplankė draugus X, Y, Z, T, U (žr. pav.).



Duotasis 24 km kelias, nueitas tarp K ir L, tegali būti kelias, nueitas tarp Y ir T. Taigi Y ir T tam tikra tvarka yra K ir L. Tada $Y \neq M$, ir nueitas kelias tarp M ir N bei nueitas kelias tarp M ir P negali būti 23 km ir 13 km. Jie tegali būti $11 + 35 = 46$ km ir $23 + 13 = 36$ km (skirtumas 10 km). Taigi $Z = M$, $X = P$ ir $U = N$. Tarp N ir P keliautojas nuėjo $23 + 13 + 11 + 35 = 82$ km.

Ats.: **E)** 82.

3 (5–6 kl.). Sofija turi tris svarelius ir tris figūreles. Lėkštinėmis svarstyklėmis ji atliko tris svėrimus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvienu atveju svarstyklės pusiausviros. Koks skaičius turėtų būti vietoj klausuko?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5**

Sprendimas. Pirmieji du (iš kairės) svėrimai kartu paėmus parodo, kad trikampis, kvadratas ir dvykš paimtas penkiakampis sveria tiek pat, kiek trikampis, kvadratas ir svareliai, kurių bendra masė yra $4 + 6 = 10$ g. Taigi dvykš paimtas penkiakampis sveria 10 g, o vienas penkiakampis sveria $10 : 2 = 5$ g.

Iš antrojo svėrimo gausime trečiąjį, jei kairiojoje svarstyklų lėkštėje pašalinsime penkiakampį, o dešiniojoje sumažinsime 6 gramų svarelį masę 5 gramais, kad išsaugotume pusiausvirą. Vadinasi, trečiuoju atveju svarelį masė lygi $? = 6 - 5 = 1$ g.

Ats.: A) 1.

4 (5–6 kl.). Koncertų salę apšviečia ??? šviestuvų. Kiekviena iš jų yra 4 arba 7 lempos, o iš viso juose yra 64 lempos. Raskite visų skaičių, pirmajame sakinyje galinčių būti vietoj ???, sumą.

Sprendimas. Lempų skaičius 64 yra ketvertų ir septynetų suma, kurios dėmenys atitinka šviestuvus. Visus tuos ketvertus atėmus iš $64 = 16 \cdot 4$, likęs skaičius vis tiek dalysis iš 4. Jis gali būti lygus 0 – tada turime 16 šviestuvų. Priešingu atveju likęs skaičius yra septynetų suma, ne didesnė už 64 ir besidalijanti iš 4. Tarp septynetų sumų 7, 14, 21, ... yra tik dvi tokios sumos: 28 ir 56. Atitinkamos lygybės $64 = 28 + 36 = 7 \cdot 4 + 4 \cdot 9$ ir $64 = 56 + 8 = 7 \cdot 8 + 4 \cdot 2$ parodo, kad šviestuvų gali būti $4 + 9 = 13$ arba $8 + 2 = 10$. Visų galimų ??? reikšmių suma lygi $16 + 13 + 10 = 39$.

Ats.: 39.

5 (5–6 kl.). Prie apskrito stalo sėdi 23 žmonės. Kiekvienas iš jų yra arba melagis (visada meluoja), arba teisuolis (visada sako tiesą). Kiekvienas iš sėdinčiųjų pasakė: „Šalia manęs sėdi melagis.“ Koku skaitmeniu baigiasi didžiausio galimo prie stalo sėdinčių teisuolių skaičiaus ir mažiausio galimo jų skaičiaus sandauga?

Sprendimas. Prie stalo bent vienas iš dviejų gretimų teisuoliui žmonių būtinai yra melagis. O melagį iš abiejų pusių būtinai supa teisuoliai (kitai jis būtų pasakęs tiesą). Taigi negali būti nei trijų gretimų teisuolių, nei dviejų gretimų melagių. Prie stalo esama ir teisuolių, ir melagių, ir galima rasti gretimus teisuolį bei melagį.

Pasirinkime vieną teisuolį, o likusius 22 žmones suskirstykime į gretimų žmonių poras. Šiose 11 porų yra bent po vieną teisuolį, tad prie stalo yra bent $11 + 1 = 12$ teisuolių. Jų gali būti lygiai 12, kai teisuoliai ir melagiai sėdi tokia tvarka: T(TM)(TM)...(TM).

Pasirinkime gretimus teisuolį ir melagį, o likusius 21 žmogų suskirstykime į gretimų žmonių trejetus. Šiuose 7 trejetuose yra daugiausiai po du teisuolius, tad prie stalo yra ne daugiau nei $7 \cdot 2 + 1 = 15$ teisuolių. Jų gali būti lygiai 15, kai teisuoliai ir melagiai sėdi tokia tvarka: MT(MTT)(MTT)...(MTT).

Sandauga $12 \cdot 15$ baigiasi skaitmeniu 0.

Ats.: 0.

6 (5–6 kl.). Dėžėje guli rutuliai. Laima ir Linas žaidžia žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas turi iš dėžės ištraukti 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 rutulius. Pralaimi žaidėjas, po kurio ėjimo dėžė lieka tuščia. Kai po Lino ėjimo dėžėje liko 19 rutulių, Laima pastebėjo, kad gali laimėti, kaip Linas bežaistų. Kiek rutulių Laima paliks dėžėje savo kitu ėjimu, laikydamasi pergalės strategijos? Raskite visas galimybes ir įrodykite, kad kitų nėra.

Sprendimas. (Taip pat žr. 7–8 kl. 4 uždavinį ir jo sprendimą.)

Kai dėžėje lieka vienas rutulys, jis ištraukiamas, o ėjimą atlikęs žaidėjas pralaimi. Kai dėžėje yra nuo 2 iki 7 rutulių, tai ėjimu galima palikti vieną rutulį ir laimėti, kaip bežaistų kitas žaidėjas. Kai dėžėje yra 8 rutuliai, tai toliau jų liks nuo 2 iki 7, o šį ėjimą atlikęs žaidėjas pralaimės, jei kitas laikysis pergalės strategijos. Kai dėžėje yra nuo 9 iki 14 rutulių, tai ėjimu galima palikti 8 rutulius ir laimėti, kaip bežaistų kitas žaidėjas. Kai dėžėje yra 15 rutulių, tai toliau jų liks nuo 9 iki 14, o šį ėjimą atlikęs žaidėjas pralaimės, jei kitas laikysis pergalės strategijos. Pagaliau, kai dėžėje yra nuo 16 iki 21 rutulio, tai ėjimu galima palikti 15 rutulių ir laimėti, kaip bežaistų kitas žaidėjas. Vadinasi, Laima, siekdama laimėti, dėžėje turi palikti 15 rutulių (ištraukti 4). Jei paliks kitą jų skaičių (nuo 13 iki 18), tai pergalės strategiją turės Linas.

Ats.: 15.

7 (5–6 kl.). Ant stebuklingos obels buvo 95 raudoni ir 19 mėlynų obuolių. Papurčius obelį, nuo jos kaskart nukrinta lygiai du obuoliai. Jei jie raudoni, tai ant obels iš karto išdygsta vienas mėlynas obuolys, jei mėlyni – tai išdygsta keturi raudoni, o jei skirtingų spalvų – tai išdygsta trys raudoni. Kelis kartus papurčius obelį, ant jos yra 100 obuolių. Kiek iš jų gali būti mėlyni? Raskite visas galimybes ir įrodykite, kad kitų nėra.

Sprendimas. Papurčius obelį, joje arba lieka iš viso vienu obuoliu mažiau, bet vienu mėlynu daugiau, arba dviem obuoliais daugiau, bet dviem mėlynais mažiau, arba vienu obuoliu daugiau, bet vienu mėlynu mažiau. Taigi bendras obuolių skaičius mažėja (didėja) tiek, kiek mėlynų obuolių skaičius didėja (mažėja). Kai bendras obuolių skaičius sumažėja nuo $95 + 19 = 114$ iki 100 – taigi 14 obuolių, tai mėlynų obuolių skaičius padidėja nuo 19 iki $19 + 14 = 33$.

Kitas sprendimas. Tarkime, kad purtant obelį, du nukritę obuoliai buvo raudoni a kartų, mėlyni b kartų ir skirtaspalviai c kartų. Tada raudonų obuolių skaičius sumažėjo skaičiumi $2a + c$ ir padidėjo skaičiumi $4b + 3c$. Taigi tarp 100 obuolių yra $95 - (2a + c) + (4b + 3c) = 95 - 2a + 4b + 2c$ raudonų. Analogiškai mėlynų obuolių yra $19 - (2b + c) + a = 19 + a - 2b - c$. Pažymėkime $d = a - 2b - c$. Tada tarp 100 obuolių yra $95 - 2d$ raudonų ir $19 + d$ mėlynų. Vadinas,

$$100 = (95 - 2d) + (19 + d) = 114 - d, \quad d = 14.$$

Gauname $19 + d = 33$ mėlynus obuolius.

Ats.: 33.

1 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 2 uždavinį.

2 (7–8 kl.). Prie natūraliojo dviženkliai skaičiaus $\overline{AB}$ dvigubos skaitmenų sumos pridėjus trigubą patį skaičių $\overline{AB}$, gautas rezultatas, besidalijantis tiek iš 4, tiek iš 5. Kiek yra tokių skaičių $\overline{AB}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Sprendimas. Skaičius

$$2(A + B) + 3\overline{AB} = 2A + 2B + 3 \cdot (10A + B) = 4 \cdot 8A + 5 \cdot B$$

dalijasi iš 4 ir iš 5. Todėl iš 4 dalijasi skaičius $5B$, o iš 5 skaičius $4 \cdot 8A$. Tinka tik $B = 0, 4, 8$ ir $A = 5$ (čia A yra pirmasis dviženkliai skaičiaus $\overline{AB}$ skaitmuo, tad $A \neq 0$). Gauname tris $\overline{AB}$ reikšmes 50, 54 ir 58. Jos tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: C) 3.

3 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 5 uždavinį. Čia reikėjo pasirinkti vieną iš atsakymų:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 5 E) 8

Ats.: A) 0.

4 (7–8 kl.). Dėžėje guli rutuliai. Laima ir Linas žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas turi iš dėžės ištraukti 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 rutulius. Pralaimi žaidėjas, po kurio ėjimo dėžė lieka tuščia. Po Laimos ėjimo likus n rutulių, ji pastebėjo, kad gali laimėti, kaip Linas bežaistų. Kokia yra didžiausia galima skaičiaus n reikšmė, kai $n < 50$?

Sprendimas. (Taip pat žr. 5–6 kl. 6 uždavinį ir jo sprendimą.)

Nagrinėkime skaičius 1, 8, 15, 22, ..., gaunamus vis pridėdant po 7. Jei po Laimos ėjimo dėžėje yra tiek rutulių, tai arba Linas po savo ėjimo iš karto pralaimi (kai tėra vienas rutulys), arba Laima gali padaryti, kad po Lino ir jos ėjimų rutulių skaičius vis sumažėtų 7, ir vėl būtų lygus vienam iš skaičių 1, 8, 15, 22, Laimai laikantis šios strategijos, po kurio nors jos ėjimo Linui liks vienas rutulys, ir Laima laimės.

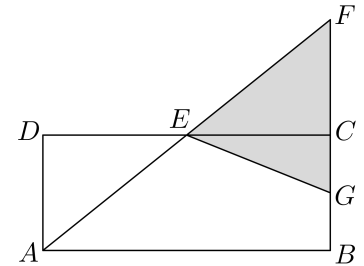
Tuo tarpu, jei po Laimos ėjimo rutulių skaičius kitoks, tai Linas savo kitu ėjimu gali padaryti jį lygų vienam iš skaičių 1, 8, 15, 22, ..., ir tada pergalės strategiją turi jis, o ne Laima.

Skaičius $1 + 7 + 7 + \dots + 7$ yra mažesnis už 50, kol septynetų sumoje yra mažiau nei 7. Taigi didžiausia tinkama n reikšmė yra $1 + 7 \cdot 6 = 43$.

Ats.: 43.

5 (7–8 kl.). Trikampio EFG dvi viršūnės yra stačiakampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai, trečioji viršūnė F yra tiesių AE ir BC sankirta, o šio trikampio plotas lygus 15 (žr. pav.). Raskite stačiakampio $ABCD$ plotą.

Sprendimas. Ieškomą plotą pažymėkime S . Kadangi $DE = CE$, $\angle AED = \angle FEC$ (kryžminiai) ir $\angle ADE = \angle FCE$ (statieji), tai $\triangle ADE = \triangle FCE$. Stačiakampį $ABCD$ galima sudaryti iš 4 trikampių, lygių $\triangle ADE$, taip pat iš 8 trikampių, lygių $\triangle CEG$. Todėl $\triangle FCE$ ir $\triangle CEG$ plotai atitinkamai lygūs $\frac{S}{4}$ ir $\frac{S}{8}$, o $\triangle EFG$ plotas 15 lygus $\frac{S}{4} + \frac{S}{8} = \frac{3S}{8}$. Vadinasi, $S = 15 : \frac{3}{8} = 15 \cdot \frac{8}{3} = 40$.



Ats.: 40.

6 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 7 uždavinį.

7 (7–8 kl.). Lukas padalijo n vienodų kortelių į vienodas krūveles, kad krūvelių būtų kuo daugiau, bet mažiau nei n . Goda padalijo kitas n vienodų kortelių į vienodas krūveles, kad krūvelių būtų kuo daugiau, bet mažiau nei pas Luką. Iš viso išėjo 365 krūvelės. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes ir įrodykite, kad kitų nėra.

Sprendimas. Tarkime, kad Lukas padalijo korteles į a krūvelių, o Goda – į b krūvelių. Tada a ir b yra du didžiausi skaičiaus n dalikliai, mažesni už n , o atitinkami kortelių skaičiai krūvelėse $n : a$ ir $n : b$ yra du mažiausi skaičiaus n dalikliai, didesni už 1.

Jei skaičius n nelyginis, tai tokie yra jo dalikliai a ir b . Tačiau jų suma 365 yra nelyginė. Taigi skaičius n lyginis, o jo mažiausias daliklis, didesnis už 1, yra $n : a = 2$. Jei $n : b = 3$ arba $n : b = 4$, tai

$$365 = a + b = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{5}{6}n \quad \text{arba} \quad 365 = a + b = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3}{4}n.$$

Pirmuoju atveju $n = 365 : 5 \cdot 6 = 73 \cdot 6 = 438$ tenkina uždavinio sąlygą ($a = 219$, $b = 146$). Antruoju atveju n nėra sveikasis skaičius. Toliau galime tarti, kad $n : a = 2$ ir $n : b \geq 5$.

Skaičius $d = n : b$ yra $n = 2a$ mažiausias daliklis, didesnis už 2. Jis didesnis už 4, todėl $n = 2a$ nesidalija iš 4, skaičius a nelyginis, o skaičius $b = 365 - a$ lyginis. Tada $n = 2a$ daliklis $d = 2a : b$ yra nelyginis skaičius, taigi tuo pačiu yra ir skaičiaus a daliklis. Pažymėkime $a = cd$. Kadangi $b = n : d = 2cd : d = 2c$, tai skaičius

$$365 = 5 \cdot 73 = a + b = cd + 2c = c(d + 2)$$

dalijasi iš $d + 2 \geq 7$. Galėtų tikti tik $d + 2 = 365$ arba $d + 2 = 73$. Tačiau tada n dalytųsi atitinkamai iš $d = 363$ daliklio 3 arba iš $c = 5$, taigi turėtų daliklį tarp $n : a = 2$ ir $n : b = d$. Vadinasi, daugiau tinkamų n nėra.

Ats.: 438.

Atsakymai:

5–6 klasės	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	D	E	A	39	0	15	33

7–8 klasės	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	E	C	A	43	40	33	438