

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
I. DALYBA SU LIEKANA IR LIEKANŲ ARITMETIKA
(2025–2027)

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį
sudarė Vilius Stakėnas ir Aivaras Novikas

Dalyba su liekana

Visų sveikųjų skaičių aibę žymėsime $\mathbb{Z}$.

Pasirinkime du sveikuosius skaičius $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$. Nagrinėkime skaičiaus b kartotinių nb , $n \in \mathbb{Z}$, seką (begalinę į abi puses)

$$\dots, -4b, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b, \dots$$

Skaičius a yra tarp kažkurių gretimų šios sekos narių (galbūt sutampa su vienu iš jų):

$$qb \leq a < (q+1)b,$$

čia $q \geq 0$, jei $a \geq 0$; $q < 0$, jei $a < 0$. Tada $r = a - qb$ yra skaičiaus a „atstumas“ iki artimiausiojo b kartotinio, kuris ne didesnis už a . Taigi, jei $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$, tai

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Tokia skaičiaus a išraiška yra vienintelė.

Skaičių q vadinsime a dalybos iš b **dalmeniu**, o r – **liekana**. Pavyzdžiui, skaičius -100 yra tarp gretimų skaičiaus 13 kartotinių $(-8) \cdot 13 = -104$ ir $(-7) \cdot 13 = -91$, todėl $a = -100$ dalybos iš $b = 13$ dalmuo yra $q = -8$, o liekana $r = a - qb = 4$, čia $-100 = (-8) \cdot 13 + 4$.

Naudodamiesi dalyba su liekana galime užrašyti skaičių a/b ypatingu būdu. Panagrinėkime skaitinį pavyzdį, kai $a = 33$, $b = 14$:

$$33 = 2 \cdot 14 + 5, \quad \frac{33}{14} = 2 + \frac{5}{14} = 2 + \frac{1}{\frac{14}{5}},$$

$$14 = 2 \cdot 5 + 4, \quad \frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{4}},$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1, \quad \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

Čia, pradėję nuo trupmenos $\frac{a}{b} = \frac{33}{14}$, vardiklyje gavome trupmeną $\frac{14}{5}$, toliau iš jos analogiškai (imdami naujus $a = 14$, $b = 5$) – trupmeną $\frac{5}{4}$, o pagaliau iš jos – natūralųjį skaičių 4 . Užrašę $4 = \frac{4}{1}$, galime atlikti dar vieną, čia nebūtiną dalybos veiksmą su nuline liekana: $4 = 4 \cdot 1 + 0$.

Pasinaudokime gautomis trupmenų išraiškomis:

$$\frac{33}{14} = 2 + \frac{1}{\frac{14}{5}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{4}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}.$$

Paskutinis gautasis užrašas vadinamas **grandinine trupmena**. Ją sudaryti galime, žinodami atliktų dalybos su liekana veiksmų dalmenis 2, 2, 1, 4. Todėl priimta vietoj ilgos trupmenų grandinės rašyti tik juos:

$$\frac{33}{14} = [2; 2, 1, 4].$$

Pirmasis dalmuo atskiriamas kabliataškiu, nes atitinka trupmenos sveikąją dalį. Pavyzdžiui,

$$[2; 3, 1, 5] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 2 + \frac{6}{23} = \frac{52}{23}.$$

Pastebėkime, kad $[1; 1, 1, 1, 1] = \frac{8}{5}$ reiškia tą patį skaičių kaip ir $[1; 1, 1, 2]$. Grandininę trupmeną, kurios paskutinis narys yra 1, visada galime sutrumpinti: $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$.

Grandininės trupmenos turi daug įdomių savybių, kuriomis naudojamosi sprendžiant įvairius skaičių teorijos uždavinius. Paminėsime vieną savybę.

Teorema. Tegu $a > b > 0$ yra du sveikieji skaičiai,

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}].$$

Raskime vienu skaičiumi sutrumpintos grandininės trupmenos reikšmę:

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{c}{d}.$$

Tada

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} = \frac{(-1)^n}{bd}, \quad ad - bc = (-1)^n.$$

Pavyzdžiui,

$$\frac{33}{14} = [2; 2, 1, 4], \quad [2; 2, 1] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{3}, \quad n = 2.$$

Taigi

$$\frac{33}{14} - \frac{7}{3} = \frac{33 \cdot 3 - 14 \cdot 7}{14 \cdot 3} = \frac{1}{14 \cdot 3}.$$

Naudodamiesi grandininėmis trupmenomis, radome vieną lygties

$$33 \cdot x - 14 \cdot y = 1$$

sprendinį sveikaisiais skaičiais: $(x, y) = (3, 7)$. Tada $(x, y) = (3, -7)$ tenkina lygtį

$$33 \cdot x + 14 \cdot y = 1.$$

Panagrinėsime tokių lygčių sprendimą išsamiau.

Lygtis $ax + by = c$

Įsivaizduokime žiogą, kuris tupi skaičių tiesės pradžios taške, t.y. taške, kurio koordinatė 0. Jis gali šokinėti po tiesės taškus į dešinę arba į kairę 2 vienetų ilgio šuoliais arba 5 vienetų ilgio šuoliais. Jis norėtų pašokinėti ir vėl sugrįžti namo. Kaip jis tai gali padaryti? Kiek ilgio vienetų sudarytų trumpiausią tokią kelionę?

Kiek pagalvoję nuspręstume, kad reikia rasti lygties

$$5 \cdot x + 2 \cdot y = 0$$

sveikuosius sprendinius. Neigiama nežinomojo reikšmė reikštų šuolių į kairę skaičių, teigiama į dešinę. Nesunku rasti visus tokius sprendinius: kadangi $5 \cdot x = -2 \cdot y$, tai x dalijasi iš 2 ir

$$x = 2 \cdot n, \quad y = -5 \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Trumpiausias keliones atitinka reikšmės $n = \pm 1$. Reikšmę $n = 1$ atitinka kelionė, sudaryta iš dviejų šuolių per 5 vienetų į dešinę ir penkių šuolių per 2 vienetų į kairę. Taigi trumpiausios kelionės ilgis yra 20 ilgio vienetų.

O dabar tarkime, kad kelionę žiogas norėtų pabaigti taške, kurio koordinatė lygi 13. Ką jam galėtume patarti? Patarimą galėtume duoti, radę sveikuosius lygties

$$5 \cdot x + 2 \cdot y = 13 \tag{1}$$

sprendinius (x, y) . Savo ruožtu, jei rastume lygties

$$5 \cdot x + 2 \cdot y = 1 \tag{2}$$

sprendinį (x_0, y_0) , tai $x = 13 \cdot x_0$, $y = 13 \cdot y_0$ būtų (1) lygties sprendinys.

Lygtį (2) galėtume spręsti, pasinaudoję grandininėmis trupmenomis. Bet sprendinį galima ir šiaip atspėti: $(x_0, y_0) = (1, -2)$. Tada $(x, y) = (13, -26)$ yra (1) lygties sprendinys, o visus sveikuosius sprendinius nusako formulės

$$x = 13 + 2 \cdot n, \quad y = -26 - 5 \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Tai nesunkiai gausime, iš (1) panariui atėmę lygybę $5 \cdot 13 + 2 \cdot (-26) = 13$ ir pasinaudoję lygties $5 \cdot x + 2 \cdot y = 0$ sprendinių formulėmis.)

Parinkę n reikšmę, gautume $l = 5 \cdot |13 + 2 \cdot n| + 2 \cdot |26 + 5 \cdot n|$ ilgio kelionę. Su kokia n reikšme kelionė trumpiausia? Galima įsitikinti, kad tai $n = -6$. Tada $x = 1$, $y = 4$, o kelionės ilgis yra 13. Žinoma, kadangi čia skaičiai nedideli, atsakymą galima įsižiūrėjus į (1) ir be skaičiavimų atspėti.

Didžiausias bendrasis daliklis

Sveikasis skaičius d vadinamas sveikojo skaičiaus n **dalikliu**, jei yra kitas sveikasis skaičius k , kad $n = k \cdot d$. Tada sakome, kad n yra d **kartotinis**. Taip

pat sakome, kad d dalija n ir žymime $d|n$. Pavyzdžiui, $17|51$, nes $51 = 17 \cdot 3$ yra skaičiaus 17 kartotinis, o šis – skaičiaus 51 daliklis.

Antikos graikų matematikai sakydavo, kad toks d „matuoja“ skaičių n , nes jį galima sudėti iš dėmenų, lygių d (mūsų pavyzdyje $51 = 17 + 17 + 17$).

Bet koki natūralųjį skaičių n dalija vienetą ir jis pats: $1|n$, $n|n$. Taigi kiekvienas natūralusis skaičius $n > 1$ turi bent du teigiamus daliklius. Jeigu daugiau teigiamų daliklių nėra, natūralusis skaičius vadinamas **pirminiu**.

Du natūralieji skaičiai m ir n turi bent vieną bendrą daliklį: $1|m$, $1|n$. Jei 1 yra vienintelis teigiamas bendras m ir n daliklis, skaičiai m ir n vadinami **tarpusavyje pirminiais**.

Natūraliųjų (ar bendriau – nenulinių sveikųjų) skaičių m ir n bendrų daliklių aibės didžiausias skaičius vadinamas **didžiausiu bendruoju dalikliu**. Jį žymime $\text{DBD}(m, n)$ arba tiesiog (m, n) . Pavyzdžiui, $(12, 18) = 6$ ir $(3000, 45) = 15$. Jei m ir n yra tarpusavyje pirminiai, tai $\text{DBD}(m, n) = 1$.

Ši sąvoka yra svarbi ir naudojama sprendžiant įvairius skaičių teorijos uždavinius. Suformuluosime teiginį apie lygties

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a, b \neq 0, \quad (3)$$

sveikuosius sprendinius.

Teorema. *Jei c nesidalija iš (a, b) , lygtis (3) neturi sveikųjų sprendinių. Jei $(a, b)|c$, tai ji turi be galo daug tokių sprendinių. Juos nusako formulės*

$$x = x_0 + \frac{b}{(a, b)} \cdot n, \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)} \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Čia (x_0, y_0) yra bet kuris konkretus (3) lygties sprendinys.

Kaip surasti dviejų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį? Kai skaičiai dideli, sudaryti bendrų daliklių aibę ir pasirinkti didžiausiąjį jos elementą kainuotų daug pastangų. Yra geresnis ir labai efektyvus būdas. Tą didžiausio bendrojo daliklio radimo metodą pateikia **Euklido algoritmas**. Sukurtas prieš pustrečio tūkstančio metų, jis ir dabar yra vienas iš svarbiausių matematikos algoritmų. Jis remiasi skaičių dalybos su liekana veiksmu.

Panagrinėkime skaitinį pavyzdį. Ieškosime skaičių $a = 313$, $b = 231$ didžiausio bendrojo daliklio $d = (a, b)$. Dalykime a iš b su liekana:

$$313 = 1 \cdot 231 + 82.$$

Kadangi $d|313, 231$, tai d dalija ir 82. Dar daugiau, $d = (231, 82)$, ir galime ieškoti šių mažesnių skaičių didžiausio bendrojo daliklio. Tęsiant tokį skaičių mažinimą, štai kiek dalybos su liekana žingsnių teks atlikti ieškant d :

$$\begin{aligned} 313 &= 1 \cdot 231 + 82, & d &= (231, 82), \\ 231 &= 2 \cdot 82 + 67, & d &= (82, 67), \\ 82 &= 1 \cdot 67 + 15, & d &= (67, 15), \\ 67 &= 4 \cdot 15 + 7, & d &= (15, 7), \\ 15 &= 2 \cdot 7 + 1, & d &= (7, 1) = 1. \end{aligned}$$

Toliau gauname $7 = 7 \cdot 1 + 0$. Paskutinė gauta nenulinė liekana (šiam pavyzdyje tai skaičius 1) ir yra pradinių skaičių didžiausias bendrasis daliklis.

Euklido algoritmas iš esmės ekvivalentus grandininės trupmenos radimui. Mūsų pavyzdyje gautieji dalmenys 1, 2, 1, 4, 2 ir 7 atitinka lygybę $\frac{313}{231} = [1; 2, 1, 4, 2, 7]$. Prisiminkime, kad atmetę paskutinį skaičių (šiuo atveju 7), gausime trupmeną, kuri leidžia išspręsti lygtį $313 \cdot x + 231 \cdot y = 1$:

$$[1; 2, 1, 4, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{9}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{11}} = \frac{42}{31},$$

$$\frac{313}{231} - \frac{42}{31} = \frac{313 \cdot 31 - 231 \cdot 42}{231 \cdot 31} = \frac{9703 - 9702}{231 \cdot 31} = \frac{1}{231 \cdot 31},$$

$$313 \cdot x + 231 \cdot y = 1, \quad \text{kai } x = 31, \quad y = -42.$$

Gavome lygties $313 \cdot x + 231 \cdot y = 1$ atskirąjį sprendinį $(x_0, y_0) = (31, -42)$. Pasinaudoję $(a, b) = (313, 231) = 1$ ir teorema (sprendinio bendrosios formulės), gauname visus sveikuosius lygties sprendinius:

$$x = 31 + 231 \cdot n, \quad y = -42 - 313 \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sprendinį $(x_0, y_0) = (31, -42)$ galima rasti ir kitaip – iš lygybių, gautų taikant Euklido algoritmą, pradedant nuo apačios ir kylant aukštyn:

$$1 = 1 \cdot 15 - 2 \cdot 7, \quad 7 = 1 \cdot 67 - 4 \cdot 15; \quad \text{taigi}$$

$$1 = 1 \cdot 15 + (-2) \cdot 7 = 1 \cdot 15 + (-2) \cdot (1 \cdot 67 + (-4) \cdot 15) = (-2) \cdot 67 + 9 \cdot 15.$$

Didžiausią bendrąjį daliklį 1, išreikštą skaičiais 15 ir 7 su koeficientais 1 ir -2, išreiškėme skaičiais 67 ir 15 su koeficientais -2 ir 9. Toliau analogiškai pasinaudojus išraiška $15 = 1 \cdot 82 + (-1) \cdot 67$, galima išreikšti 1 skaičiais 82 ir 67 su koeficientais 9 ir -11. Tęsiant šį procesą nuo apačios iki viršaus užpildomas tokios lentelės trečiasis stulpelis:

313, 231	1	31, -42
231, 82	2	-11, 31
82, 67	1	9, -11
67, 15	4	-2, 9
15, 7	2	1, -2

Kiekvieną naują skaičių porą iš ankstesnės galima greičiau gauti pagal taisyklę $(u, v) \rightarrow (v, u - q \cdot v)$, kur q yra Euklido algoritmu gautas dalmuo iš antrojo stulpelio (toje eilutėje, kurios trečiasis langelis tuo metu pildomas). Taigi

$$(1, -2) \rightarrow (-2, 1 - 4 \cdot (-2)) = (-2, 9) \rightarrow (9, -2 - 1 \cdot 9) = (9, -11) \rightarrow (-11, 9 - 2 \cdot (-11)) = (-11, 31) \rightarrow (31, -11 - 1 \cdot 31) = (31, -42) = (x_0, y_0).$$

Pasinaudoję pavyzdžio skaičiavimais išspręsimė dar vieną uždavinį.

Uždavinys. *Reikia rasti visus sveikuosius skaičius, kuriuos dalijant iš 313 bei 231 atitinkamai gaunamos liekanos 3 ir 5. (Čia galėtume pasirinkti ir bet kokias kitas norimas liekanų reikšmes.)*

Sprendimas. Kadangi

$$231y_0 = 1 - 313x_0,$$

tai skaičių $231y_0$ dalydami iš 313 ir 231 gautume liekanas 1 ir 0. Tada skaičių $3 \cdot 231y_0$ dalydami iš 313 ir 231 gautume liekanas, atitinkamai lygias 3 ir 0. Analogiškai skaičių $5 \cdot 313x_0$ dalydami iš 313 ir 231, gautume liekanas 0 ir 5. Jeigu iš 313 ir 231 dalysime sumą

$$3 \cdot 231y_0 + 5 \cdot 313x_0 = -29106 + 48515 = 19409,$$

tai gausime norimas atitinkamas liekanas 3 ir 5.

Jei du skaičiai tenkina uždavinio sąlygą, tai jų skirtumas dalijasi iš 313 ir 231 su liekana 0. Kadangi šie dalikliai yra tarpusavyje pirminiai, tai tas skirtumas dalijasi iš $313 \cdot 231$. Todėl visi skaičiai, tenkinantys mūsų sąlygą, gaunami prie vieno turimo skaičiaus pridedant $313 \cdot 231$ kartotinius:

$$19409 + 313 \cdot 231n = 19409 + 72303n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Taigi 19409 yra toks mažiausias teigiamas skaičius (gaunamas su $n = 0$).

Dalybos liekanų aritmetika

Pasirinkime sveikąjį skaičių $n > 1$. Dalydami kitus skaičius iš n , galime gauti liekanas $0, 1, \dots, n-1$. Taigi visų sveikųjų skaičių aibę galime išskaidyti į n nesikertančių poaibių:

$$A(r|n) = \{qn + r : q = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pavyzdžiui, aibę $A(3|7)$ sudaro visi skaičiai, kurie dalijasi iš 7 su liekana 3. Jie gaunami prie skaičiaus 3 bet kiek kartų pridėjus arba atėmus 7. Tai skaičiai $\dots, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots$. Duotam n parinkę po vieną skaičių iš kiekvienos aibės, sudarytume tų aibių „atstovų“ aibę. Pavyzdžiui, kai $n = 7$, tai 7 aibių „atstovai“ gali būti $7, 1, 16, -4, 25, 5, -8$ – jie reprezentuoja dalybos liekanas $0, 1, \dots, 6$. Paprastai „atstovų“ vaidmenį suteikiame mažiausiems neneigiamiesiems skaičiams, t. y. pačioms liekanoms $0, 1, \dots, n-1$.

Pastebėkime, kad sveikieji skaičiai a ir b priklauso tai pačiai aibei $A(r|n)$, kai skirtumas $a - b$ dalijasi iš n . Šią sąryšį žymėsime vokiečių matematiko K. F. Gauso (Carl Friedrich Gauss) įvestu žymeniu

$$a \equiv b \pmod{n};$$

skaitome: a **lygsta** b **moduliu** n . Patį sąryšį vadinsime **lyginiu**.

Pavyzdžiui,

$$27 \equiv 17 \pmod{5}, \quad 38 \equiv -2 \pmod{5}, \quad -4 \equiv -4+5k \pmod{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Keletas lyginių savybių yra panašios į įprastines skaičių savybes. Nesunku įsitikinti, kad teisingas toks teiginys.

Teiginys. Tegu $n > 1$ yra natūralusis skaičius ir su sveikaisiais skaičiais a, b, c, d teisingi lyginiai

$$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n}.$$

Tada taip pat teisingi lyginiai

$$a \pm b \equiv c \pm d \pmod{n}, \quad a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}.$$

Taigi sudėję arba sudauginę teisingų lyginių kairiąsias puses ir dešiniąsias puses bei rezultatus sulyginę, vėl gauname teisingus lyginius.

Išvada. Jei $a \equiv b \pmod{n}$ ir k yra natūralusis skaičius, tai

$$k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{n}, \quad a^k \equiv b^k \pmod{n}.$$

Šiais teiginiais naudojamės skaičiuodami, jeigu mums rūpi ne patys aritmetinių veiksmų rezultatai, bet tik dalybos iš tam tikro skaičiaus liekanos.

Uždavinys. Kam lygios skaičiaus $27 \cdot 23^2 + 31 \cdot 28 + 16$ dalybos iš 7 bei 10 liekanos?

Sprendimas. Visiškai nereikia apskaičiuoti paties skaičiaus reikšmės. Pasinaudoję lyginių savybėmis ir tuo, kad

$$\begin{aligned} 27 &\equiv -1 \pmod{7}, & 23 &\equiv 2 \pmod{7}, & 31 &\equiv 3 \pmod{7}, \\ 28 &\equiv 0 \pmod{7}, & 16 &\equiv 2 \pmod{7}, \end{aligned}$$

gausime

$$27 \cdot 23^2 + 31 \cdot 28 + 16 \equiv (-1) \cdot 2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \equiv -2 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Taigi dalybos iš 7 liekana yra 5.

Skaičiuodami dalybos iš 10 liekaną pasinaudosime tuo, kad kiekvienas natūralusis skaičius moduliui 10 lygsta paskutiniojo dešimtainės išraiškos skaitmens reikšmei. Pavyzdžiui,

$$3456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad \text{tačiau} \quad -3456 \equiv -6 \equiv 4 \pmod{10}.$$

Taigi

$$27 \cdot 23^2 + 31 \cdot 28 + 16 \equiv 7 \cdot 3^2 + 1 \cdot 8 + 6 \equiv 7 \cdot (-1) + 1 \cdot 8 + 6 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Vadinasi, duotasis skaičius baigiasi skaitmeniu 7 ir dalijasi iš 10 su liekana 7.

Uždavinys. Kam lygi skaičiaus $a = 27^{3030} \cdot 23^4 + 38^{3031} \cdot 41 + 4^{3m}$ dalybos iš 13 liekana, kai skaičius m natūralusis? Su kokių skaitmeniu x triženklis skaičius $b = \overline{3x1}$ dalijasi iš 13?

Sprendimas. Remdamiesi lyginiais $27 \equiv 1 \pmod{13}$, $23 \equiv -3 \pmod{13}$, $38 \equiv -1 \pmod{13}$, $41 \equiv 2 \pmod{13}$, $4^{3m} \equiv 64^m \equiv (-1)^m \pmod{13}$, gauname

$$a \equiv 1^{3030} \cdot (-3)^4 + (-1)^{3031} \cdot 2 + (-1)^m \equiv 79 + (-1)^m \equiv 1 + (-1)^m \pmod{13}.$$

Vadinasi, a dalijasi iš 13 su liekana $1 + (-1) = 0$, kai m nelyginis, ir su liekana $1 + 1 = 2$, kai m lyginis.

Kadangi $b \equiv 3 \cdot 100 + x \cdot 10 + 1 \equiv 301 + 10x \equiv 23 \cdot 13 + 2 + (-3)x \equiv 2 - 3x \pmod{13}$, tai turime patikrinti, kuriam skaitmeniui x skaičius $2 - 3x$ dalijasi iš 13. Tinka tik $x = 5$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite grandininės trupmenos $[1; 3, 1, 1, 2, 3]$ reikšmę. Išreikškite skaičių $\frac{105}{23}$ grandinine trupmena.

2. Fibonačio skaičių seka $\{F_n\}$ apibrėžiama tokiomis lygybėmis (rekurencijai, t. y. kiekvieną naują narį gaunant iš ankstesnių pagal formulę):

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Apibrėžkime kitą seką, kiek pakeitę lygybę:

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Grandininėmis trupmenomis išreikškite skaičius F_6/F_5 , G_6/G_5 , o tada – skaičius F_8/F_7 , G_8/G_7 .

3. Pasinaudoję skaičiaus $\frac{259}{96}$ grandinine trupmena, raskite lygčių

$$259x + 96y = 1, \quad 259x + 96y = 17$$

po vieną sveikąjį sprendinį (x, y) .

4. Turime svertines svarstyklės (pusiausvyras, kai jų abiejose lėkštėse padėtų objektų masės lygios) ir daug svarelių, kurių masės yra 9 g ir 11 g. Ant vienos lėkštės leidžiama dėti tik 9 g, o ant kitos – tik 11 g svarelius. Kaip vienu svėrimu galima pasverti lygiai 1 g cukraus? Užrašykite bendromis formulėmis, kiek iš viso svarelių galima tam panaudoti, ir nustatykite mažiausią galimą panaudotų svarelių skaičių.

5. Patikrinkite, kad taikant Euklido algoritmą skaičiams $a = 73$ ir $b = 56$, gaunami dalmenys 1, 3, 3, 2, 2, ir raskite lygties $73x + 56y = 1$ vieną

sveikąjį sprendinį $(x, y) = (x_0, y_0)$, užpildydami trijų stupelių lentelę (kaip pavyzdyje apie skaičius $(a, b) = (313, 231)$). Užrašykite bendrąsias formules šios lygties visiems sveikiesiems sprendiniams (x, y) .

6. Pasinaudoję lygties $103x + 101y = 1$ sprendiniu, raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalijant iš 103 gaunama liekana 2, o dalijant iš 101 – liekana 3.

7. Raskite du mažiausius natūraliuosius skaičius x , kuriems skaičius $18^{1234} \cdot x^2 + 343415^3 \cdot x + 2 \cdot 33^{10111213}$ dalijasi iš 17.

8. Įrodykite, kad skaičius $2^{5m} + (-1)^m \cdot 123456783$ dalijasi iš 11 su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi m .

9. Nagrinėkime skaičius, užrašomus dešimtainėje sistemoje taip: $\overline{3xy754}$. Raskite visas skaitmenų poras (x, y) , su kuriomis toks skaičius dalijasi iš 11. *Užuomina.* Iš viso yra 9 tokios poros.

10. Su kokiomis liekanomis iš 13 gali dalytis skaičius $3^{9m} \cdot 5^n$, kai m ir n yra natūralieji skaičiai? *Užuomina.* Iš viso yra 4 tinkamos liekanos. Pagrįskite, kad skaičių 5^n dalybos iš 13 liekanų seka, kai $n = 1, 2, \dots$, yra periodinė.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki 2025 m. gruodžio 15 d. mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>