

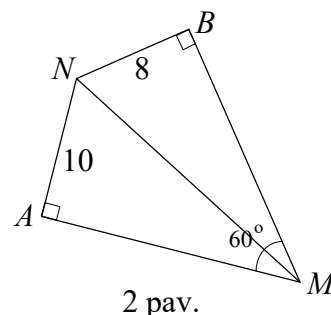
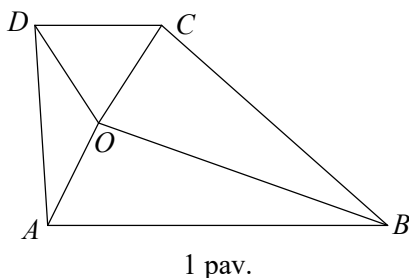


PASVALIO KRAŠTO
25-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2025 m. lapkričio 21 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 2. Įrodykite, kad jų sandauga negali būti didesnė už 1.
2. Jei statinėje trūktų (iki pilnos) 30% vandens, tai joje būtų 30 litrų daugiau vandens negu tada, kai į ją (tuščią) būtų įpilta 30% vandens. Kokia statinės talpa?
3. Nustatykite, kokiai parametro m reikšmei esant lygties
$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$
sprendinių kvadratų suma yra mažiausia.
4. Skaičius n yra natūralusis, o skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš skaičiaus $n + 5$. Kokia yra didžiausia galima n reikšmė?
5. Skaičius n yra natūralusis, o trupmenos
$$\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$$
yra nesuprastinamos (jų yra 41). Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?
6. Įrodykite, kad nėra tokios sveikųjų skaičių poros $(x; y)$, kuriai esant galioja lygybė $x^2 + y^2 = 2027$.
7. Nuvažiavęs pusę kelio dviratininkas padidino greitį 25 procentais ir į galutinį punktą nuvažiavo 0,5 valandos anksčiau negu planavo. Kiek laiko dviratininkas užtruko kelyje?
8. Raskite visas realiąsias dydžio x reikšmes, kurioms esant galioja lygybė
$$(((x^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3)^2 = 4.$$
9. Trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel CD$, žr. 1 pav.) viduje pažymėtas taškas O taip, kad $AO = OD = OC = CD$ ir $AB = OB = CB$. Raskite kampą DAO .
10. Raskite stačiųjų trikampių MAN ir MBN (žr. 2 pav.) bendros įžambinės MN ilgį, jeigu $\angle AMB = 60^\circ$, $AN = 10$ ir $BN = 8$.





PASVALIO KRAŠTO
25-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2025 m. lapkričio 21 d.

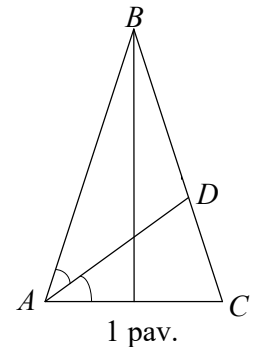
UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

2. Lygiašonis trikampis ABC vadinamas *tauriuoju*, jeigu pusiaukampinė AD šoninę kraštinę BC kerta *aukso pjūviu* – atkarpų BD ir DC ilgių santykis $\frac{BD}{DC}$ toks pat kaip ir atkarpų BC ir BD santykis $\frac{BC}{BD}$ (žr. 1 pav.).

Apskaičiuokite trikampio ABC kampus.



3. Į apskritimą, kurio centras O , įbrėžtas taisyklingasis dešimtkampis $A_1A_2\dots A_{10}$. Įrodykite, kad trikampiai

$$A_iOA_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad \text{ir} \quad A_{10}OA_1$$

yra taurieji (žr. 2 užd.).

4. Skaičius n yra natūralusis, o skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš skaičiaus $n + 5$. Kokia yra didžiausia galima n reikšmė?

5. Skaičius n yra natūralusis, o trupmenos

$$\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$$

yra nesuprastinamos (jų yra 41). Kokia yra galima mažiausia n reikšmė?

6. Įrodykite, kad nėra tokios sveikųjų skaičių poros $(x; y)$, kuriai esant galioja lygybė $x^2 + y^2 = 2027$.

7. Raskite visas realiųjų skaičių a ir b poras $(a; b)$, kurioms esant

$$(a+b)(a^2+b^2)=85 \quad \text{ir} \quad (a-b)(a^2-b^2)=45.$$

8. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurioms esant galioja dviguba lygybė

$$x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y. \quad (1)$$

9. Viena parabolės $y = x^2$ šaka rieda spindulio R apskritimas tol, kol paliečia kitą šios parabolės šaką. Raskite šioje padėtyje esančio apskritimo centro atstumą iki parabolės viršūnės. Taip pat raskite mažiausią spindulio R reikšmę.

10. Į apskritimą įbrėžtas šešiakampis $ABCDEF$, kuriame

$$AB = 2, \quad BC = 11, \quad CD = DE = EF = FA = x.$$

Raskite x , jei AD yra šio apskritimo skersmuo.