



PASVALIO KRAŠTO
25-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2025 m. lapkričio 21 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 2. Įrodykite, kad jų sandauga negali būti didesnė už 1.

Įrodymas. Tegu a ir b yra realieji skaičiai, kurių suma lygi 2. Iš lygybės $a + b = 2$ gauname, kad $b = 2 - a$, todėl

$$1 - ab = 1 - a(2 - a) = 1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2 \geq 0.$$

Iš čia ir išplaukia, kad

$$ab \leq 1, \text{ kai } a + b = 2.$$

2. Jei statinėje trūktų (iki pilnos) 30% vandens, tai joje būtų 30 litrų daugiau vandens negu tada, kai į ją (tuščią) būtų įpilta 30% vandens. Kokia statinės talpa?

Sprendimas. Tegu x yra statinės talpa (litrais). Pagal uždavinio sąlygą, $0,7x - 0,3x = 30$. Todėl $x = 30 : 0,4 = 75$ (litrai).

Ats.: 75 litrai.

3. Nustatykite, kokiai parametro m reikšmei esant lygties

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

sprendinių kvadratų suma yra mažiausia.

Sprendimas. Tegu x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ sprendiniai. Pagal Vijeto teorema,

$$x_1 + x_2 = -(m - 2) = 2 - m \quad \text{ir} \quad x_1 x_2 = -(m + 3).$$

Tada

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2 - m)^2 + 2(m + 3) = \\ &= 4 - 4m + m^2 + 2m + 6 = m^2 - 2m + 10 = (m - 1)^2 + 9 \geq 9. \end{aligned}$$

Matome, kad kvadratų sumos mažiausia reikšmė (ji lygi 9) pasiekama tik esant $m = 1$.

Ats.: $m = 1$.

4. Skaičius n yra natūralusis, o skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš skaičiaus $n + 5$. Kokia yra didžiausia galima n reikšmė?

Sprendimas. Pažymėkime $m = n + 5$. Tada $n = m - 5$ ir $n^4 + 1405 = (m - 5)^4 + 1405 = m^4 - 20m^3 + 150m^2 - 500m + 2030 = m(m^3 - 20m^2 + 150m - 500) + 2030$.

Aišku, kad skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš m , tik kai 2030 dalijasi iš m . Didžiausias toks skaičius yra 2030, o ieškomas didžiausias skaičius n yra $2030 - 5 = 2025$.

Ats.: 2025.

5. Skaičius n yra natūralusis, o trupmenos

$$\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$$

yra nesuprastinamos (jų yra 41). Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

Sprendimas. Trupmenos $\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$ galima užrašyti pavidalu

$$\frac{3n+k+1}{k} = \frac{3n+1}{k} + 1, \quad k = 8, 9, 10, \dots, 48.$$

Aišku, kad trupmenos $\frac{3n+k+1}{k}$ yra nesuprastinamos, kai tokios yra trupmenos $\frac{3n+1}{k}$; $k = 8, 9, 10, \dots, 48$. O šios trupmenos yra nesuprastinamos, kai $3n+1$ neturi bendrų daliklių, didesnių už 1, su jokiais iš skaičių $k \in \{8; 9; 10; \dots; 48\}$. Jei $3n+1 \leq 48$, tai $3n+1$ turi pirminį daliklį, mažesnį už 48, kuris yra kartu ir vieno iš skaičių k , $k \in \{8; 9; 10; \dots; 48\}$, pirminis daliklis. Vadinasi, $3n+1 \geq 49$ ir todėl $n \geq 16$. Tikrinant iš eilės $n = 16, 17, 18, \dots$, gaunama mažiausia reikšmė $n = 20$. Tada $3n+1 = 61$ yra pirminis skaičius ir neturi daliklių tarp 1 ir 61.

Ats.: 20.

6. Įrodykite, kad nėra tokios sveikųjų skaičių poros $(x; y)$, kuriai esant galioja lygybė $x^2 + y^2 = 2027$.

Įrodymas. Aišku, kad negalimas atvejis, jog abu poros skaičiai lyginiai arba abu nelyginiai.

Tegu $x = 2m$ ir $y = 2k - 1$ (m ir k – sveikieji skaičiai). Tada

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2027 &\Rightarrow (2m)^2 + (2k-1)^2 = 2027 \Rightarrow 4(m^2 + k^2 - k) + 1 = 2027 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(m^2 + k^2 - k) = 2026 \Rightarrow 2(m^2 + k^2 - k) = 1013. \end{aligned}$$

Matome, kad jokia sveikųjų skaičių pora $(m; k)$ netenkina lygybės $2(m^2 + k^2 - k) = 1013$, nes kairėje pusėje visada gautume lyginį skaičių arba nulį.

7. Nuvažiavęs pusę kelio dviratininkas padidino greitį 25 procentais ir į galutinį punktą nuvažiavo 0,5 valandos anksčiau negu planavo. Kiek laiko dviratininkas užtruko kelyje?

Sprendimas. Tegu t yra planuotas kelionės laikas, v – pradinis dviratininko greitis, o S – nuvažiuotas kelias. Pagal uždavinio sąlygą,

$$S = vt \quad \text{ir} \quad S = v \cdot \frac{1}{2}t + (v + 0,25v) \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \right).$$

Iš čia gauname:

$$\begin{aligned} vt &= \frac{vt}{2} + \frac{1,25vt}{2} - \frac{1,25v}{2}, \\ 0,25vt &= 1,25v, \\ t &= 5. \end{aligned}$$

Vadinasi, kelionėje dviratininkas užtruko $5 - 0,5 = 4,5$ (h).

Ats.: 4,5 h.

8. Raskite visas realiąsias dydžio x reikšmes, kurioms esant galioja lygybė

$$(((x^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3)^2 = 4.$$

Sprendimas. Traukdami kvadratinę šaknį gausime, kad

$$((x^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3 = 2 \quad \text{arba} \quad ((x^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3 = -2;$$

taigi

$$((x^2 - 1)^2 - 2)^2 = 5 \text{ arba } ((x^2 - 1)^2 - 2)^2 = 1.$$

Pirmu atveju (atmesdami netinkamas galimybes) gauname:

$$(x^2 - 1)^2 - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{5}}}.$$

Antru atveju (atmesdami netinkamas galimybes) gauname:

$$(x^2 - 1)^2 - 2 = \pm 1 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 3 \text{ arba } (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}})$$

$$\text{arba } (x^2 - 1 = \pm 1 \Rightarrow x^2 = 1 \pm 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \text{ arba } x = 0).$$

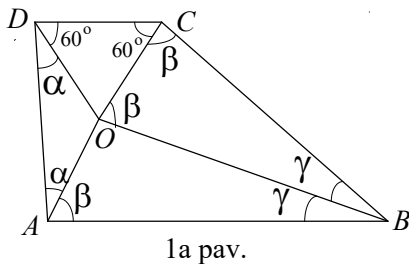
$$\text{Ats.: } \pm \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{5}}}; \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}; \pm \sqrt{2}; 0.$$

9. Trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel CD$, žr. 1 pav.) viduje pažymėtas taškas O taip, kad $AO = OD = OC = CD$ ir $AB = OB = CB$. Raskite kampą DAO .

Sprendimas. Iš sąlygos išplaukia, kad:

- 1) $\triangle COD$ yra lygiakraštis – jo kampai lygūs 60° ;
- 2) $\triangle AOD$ yra lygiašonis, nes $AO = OD$;
- 3) $\triangle ABO = \triangle OBC$ – abu lygiašoniai.

Pažymėkime (žr. 1a pav.):



$$\alpha = \angle ADO = \angle DAO;$$

$$\beta = \angle OAB = \angle OCB = \angle AOB = \angle COB;$$

$$\gamma = \angle ABO = \angle OBC.$$

Trapecijos kampų A ir D suma lygi 180° , todėl gauname:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + (\alpha + 60^\circ) &= 180^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\alpha + \beta &= 120^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ - \frac{1}{2}\beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Trikampiai ABO ir OBC yra lygiašoniai, todėl

$$2\beta + \gamma = 180^\circ. \quad (2)$$

Trapecijos kampų B ir C suma lygi 180° , todėl

$$2\gamma + (\beta + 60^\circ) = 180^\circ \Rightarrow \beta + 2\gamma = 120^\circ.$$

Iš šios ir (2) lygčių sistemos

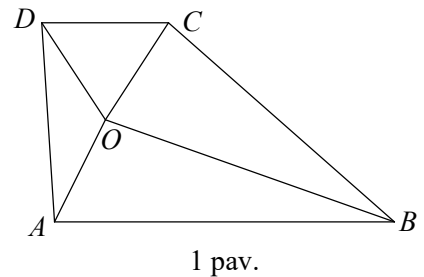
$$\begin{cases} \beta + 2\gamma = 120^\circ, \\ 2\beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

gauname, kad $3\beta + 3\gamma = 300^\circ$. Vadinas, $\beta + \gamma = 100^\circ$ ir $\beta = 80^\circ$.

Belieka įrašyti $\beta = 80^\circ$ į (1) formulę ir apskaičiuoti ieškomą kampą:

$$\angle DAO = \alpha = 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 20^\circ.$$

$$\text{Ats.: } 20^\circ.$$

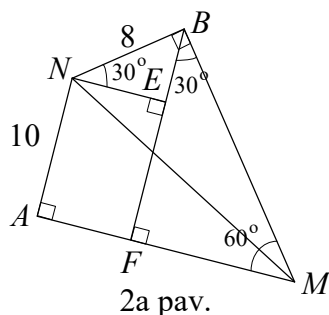


10. Raskite stačiųjų trikampių MAN ir MBN (žr. 2 pav.) bendros įžambinės MN ilgį, jeigu $\angle AMB = 60^\circ$, $AN = 10$ ir $BN = 8$.

Sprendimas. Nubrėžkime $BF \perp AM$ ir $NE \perp BF$ (žr. 2a pav.).

Aišku, kad $\angle MBF = 30^\circ$. Todel $\angle NBF = 60^\circ$ ir $\angle BNE = 30^\circ$.

Remdamiesi šia analize gauname, kad



$$BF = BE + EF = \frac{1}{2}BN + AN = 4 + 10 = 14$$

ir

$$FM = \frac{1}{2}MB.$$

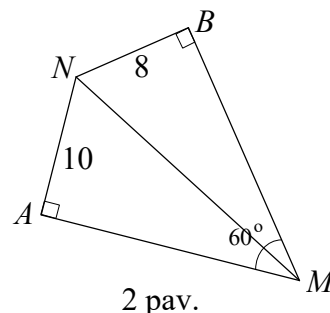
Pagal Pitagoro teoremą (taikant $\triangle MBF$),

$$MB^2 = \left(\frac{1}{2}MB\right)^2 + 14^2 \Rightarrow \frac{3}{4}MB^2 = 196 \Rightarrow MB^2 = \frac{196 \cdot 4}{3} = \frac{784}{3}.$$

Vadinasi,

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 \Rightarrow MN^2 = \frac{784}{3} + 64 = \frac{784 + 192}{3} = \frac{976}{3} = \frac{4^2 \cdot 61}{3} \Rightarrow MN = 4 \cdot \sqrt{\frac{61}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{183}.$$

$$Ans.: MN = \frac{4}{3}\sqrt{183}.$$



2 pav.



PASVALIO KRAŠTO 25-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2025 m. lapkričio 21 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI vyresniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Irodymas. Aišku, kad $\sin 72^\circ = \sin(4 \cdot 18^\circ)$ ir $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$. Taikydami dvigubo argumento formules gautume, kad

$$\sin 72^\circ = 2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = 4 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ (\cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ) = 4 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ).$$

Vadinasi,

$$\cos 18^\circ = 4 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ).$$

Kadangi $\cos 18^\circ \neq 0$, tai ši lygybė ekvivalenti lygybei

$$4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) = 1.$$

Toliau galima skaičiuoti taip:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ 4t(1-2t^2) = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ -8t^3 + 4t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ 8t^3 - 4t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ (8t^3 - 4t^2) + (4t^2 - 4t + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ 4t^2(2t-1) + (2t-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ (2t-1) \cdot (4t^2 + 2t - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ t = \frac{1}{2} \text{ arba } 4t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = \sin 18^\circ, \\ t = \frac{1}{2} \text{ arba } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ nes } \sin 18^\circ \in \left(0; \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Lygiašonis trikampis ABC vadinamas *tauriuoju*, jeigu pusiaukampinė AD šoninę kraštinę BC kerta *aukso pjūviu* – atkarpų BD ir DC ilgių santykis $\frac{BD}{DC}$ toks pat kaip ir atkarpų BC ir BD santykis $\frac{BC}{BD}$ (žr. 1 pav.).

Apskaičiuokite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Tegu $\angle B = \alpha$; tada

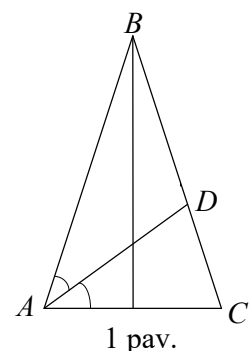
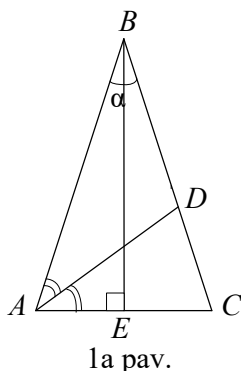
$$\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha).$$

Pagal pusiaukampinės savybę,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Nubrėžę aukštinę BE (žr. 1a pav.) lengvai suprasime, kad

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB}.$$



Taigi

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BD}{DC} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DC}{BD}. \quad (1)$$

Santykiui $\frac{DC}{BD}$ rasti pasinaudokime sąlyga, kad taškas D yra kraštinės BC aukso taškas, t. y. sąlyga, jog

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{BD}.$$

Pažymėję $x = BD$ ir tarę, kad $BC = a$, gausime:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5} \cdot a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot a.$$

Kadangi $x > 0$, tai $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$. O tada

$$\frac{DC}{BD} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Įrašę į (1) gausime, kad $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Kadangi $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ$ (žr. 1 užd.), tai

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin 18^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

Vadinasi, $\angle B = 36^\circ$, $\angle A = \angle C = 72^\circ$.

Ats.: $\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$.

3. Į apskritimą, kurio centras O , įbrėžtas taisyklingasis dešimtkampis $A_1 A_2 \dots A_{10}$.

Įrodykite, kad trikampiai

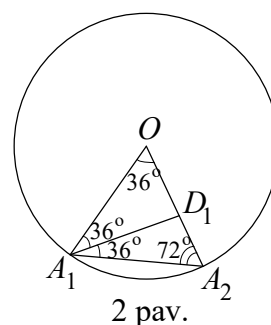
$$A_i O A_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \text{ ir } A_{10} O A_1$$

yra taurieji (žr. 2 užd.).

Irodymas. Aišku, kad visi 10 trikampių yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Nagrinėkime $\triangle A_1 O A_2$ (žr. 2 pav.). Jame $\angle O = 36^\circ$, $\angle A_1 = \angle A_2 = 72^\circ$. Pusiaukampinė $A_1 D_1$ šį trikampį dalija į du lygiašonius trikampius ($OD_1 = D_1 A_1 = A_1 A_2$). Todėl remdamiesi trikampio pusiaukampinės savybe, gauname, kad

$$\frac{OD_1}{D_1 A_2} = \frac{A_1 O}{A_1 A_2} = \frac{OA_2}{OD_1}.$$

Lygybė $\frac{OD_1}{D_1 A_2} = \frac{OA_2}{OD_1}$ reiškia, kad pusiaukampinė $A_1 D_1$ kraštinę OA_2 kerta aukso pjūviu. Todėl lygiašonis trikampis $A_1 O A_2$ yra taurysis.



4. Skaičius n yra natūralusis, o skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš skaičiaus $n + 5$. Kokia yra didžiausia galima n reikšmė?

Sprendimas. Pažymėkime $m = n + 5$. Tada $n = m - 5$ ir

$$n^4 + 1405 = (m-5)^4 + 1405 = m^4 - 20m^3 + 150m^2 - 500m + 2030 = m(m^3 - 20m^2 + 150m - 500) + 2030.$$

Aišku, kad skaičius $n^4 + 1405$ dalijasi iš m , tik kai 2030 dalijasi iš m . Didžiausias toks skaičius yra 2030, o ieškomas didžiausias skaičius n yra $2030 - 5 = 2025$.

Ats.: 2025.

5. Skaičius n yra natūralusis, o trupmenos

$$\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$$

yra nesuprastinamos (jų yra 41). Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

Sprendimas. Trupmenas $\frac{3n+9}{8}, \frac{3n+10}{9}, \frac{3n+11}{10}, \dots, \frac{3n+49}{48}$ galima užrašyti pavidalu

$$\frac{3n+k+1}{k} = \frac{3n+1}{k} + 1, \quad k = 8, 9, 10, \dots, 48.$$

Aišku, kad trupmenos $\frac{3n+k+1}{k}$ yra nesuprastinamos, kai tokios yra trupmenos $\frac{3n+1}{k}$; $k = 8, 9, 10, \dots, 48$. O šios trupmenos yra nesuprastinamos, kai $3n+1$ neturi bendrų daliklių, didesnių už 1, su jokia iš skaičių $k \in \{8; 9; 10; \dots; 48\}$. Jei $3n+1 \leq 48$, tai $3n+1$ turi pirminį daliklį, mažesnį už 48, kuris yra kartu ir vieno iš skaičių k , $k \in \{8; 9; 10; \dots; 48\}$, pirminis daliklis. Vadinasi, $3n+1 \geq 49$ ir todėl $n \geq 16$. Tikrinant iš eilės $n = 16, 17, 18, \dots$, gaunama mažiausia reikšmė $n = 20$. Tada $3n+1 = 61$ yra pirminis skaičius ir neturi daliklių tarp 1 ir 61.

Ats.: 20.

6. Įrodykite, kad nėra tokios sveikųjų skaičių poros $(x; y)$, kuriai esant galioja lygybė $x^2 + y^2 = 2027$.

Irodymas. Aišku, kad negalimas atvejis, jog abu poros skaičiai lyginiai arba abu nelyginiai.

Tegu $x = 2m$ ir $y = 2k - 1$ (m ir k – sveikieji skaičiai). Tada

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2027 &\Rightarrow (2m)^2 + (2k-1)^2 = 2027 \Rightarrow 4(m^2 + k^2 - k) + 1 = 2027 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(m^2 + k^2 - k) = 2026 \Rightarrow 2(m^2 + k^2 - k) = 1013. \end{aligned}$$

Matome, kad jokia sveikųjų skaičių pora $(m; k)$ netenkina lygybės $2(m^2 + k^2 - k) = 1013$, nes kairėje pusėje visada gautume lyginį skaičių arba nulį.

7. Raskite visas realiųjų skaičių a ir b poras $(a; b)$, kurioms esant

$$(a+b)(a^2+b^2) = 85 \quad \text{ir} \quad (a-b)(a^2-b^2) = 45.$$

Sprendimas. Kadangi

$$(a-b)(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)^2 = (a+b)(a^2+b^2) - 2ab(a+b) = 85 - 2ab(a+b),$$

tai

$$(a-b)(a^2-b^2) = 45 \Rightarrow 85 - 2ab(a+b) = 45 \Rightarrow ab(a+b) = 20 \Rightarrow a+b = \frac{20}{ab}.$$

Tada

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2+b^2) = 85 &\Rightarrow \frac{20}{ab}(a^2+b^2) = 85 \Rightarrow 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 17 \Rightarrow 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = 17 \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4 = 17 \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 17 \cdot \frac{a}{b} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4 \text{ arba } \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 4b \text{ arba } b = 4a. \end{aligned}$$

Jei $a = 4b$, tai

$$(4b+b)((4b)^2+b^2) = 85 \Rightarrow b^3 = 1 \Rightarrow b = 1; \text{ taigi } a = 4 \text{ ir } b = 1.$$

Jei $b = 4a$, tai analogiškai gauname, kad

$$a = 1 \text{ ir } b = 4.$$

Vadinasi, lygčių sistema turi du realiuosius sprendinius: $(4; 1)$ ir $(1; 4)$.

Ats.: $(4; 1), (1; 4)$.

8. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurioms esant galioja dviguba lygybė
- $$x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y. \quad (1)$$

Sprendimas. Aišku, kad jeigu $y=x$, tai (1) lygybė galioja esant bet kuriam realiajam skaičiui x .
 Aiškinkimės, ar (1) lygybė įmanoma ir dar kuriais nors kitais atvejais.
 Kadangi

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

ir

$$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= (x^5 - x^4y) + (x^4y - x^3y^2) + (x^3y^2 - x^2y^3) + (x^2y^3 - xy^4) + (xy^4 - y^5) = \\ &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4), \end{aligned}$$

tai (esant sąlygai $y \neq x$, $x \in \mathbb{R}$) (1) lygybė ekvivalenti lygybių

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \text{ ir } x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 1$$

sistemai. Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ (x^2 + xy + y^2)^2 - x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ 1 - xy(x^2 + 2xy + y^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ xy(x + y)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x = 0 \text{ arba } y = 0, \text{ arba } y = -x. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Irašę (paeiliui) $x = 0$, $y = 0$ ir $y = -x$ į (2) sistemos pirmą lygtį gausime:

$$1) \quad x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1;$$

$$2) \quad y = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1;$$

$$3) \quad y = -x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Vadinasi, esant sąlygai $y \neq x$, $x \in \mathbb{R}$, (1) lygčių sistema turi šiuos sprendinius: $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 0)$.

Ats.: $\{(x; y): y = x, x \in \mathbb{R}\}, (0; \pm 1), (\pm 1; 0), (1; -1) \text{ ir } (-1; 1)$,

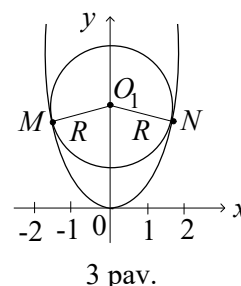
9. Viena parabolės $y = x^2$ šaka rieda spindulio R apskritimas tol, kol paliečia kitą šios parabolės šaką. Raskite šioje padėtyje esančio apskritimo centro atstumą iki parabolės viršūnės. Taip pat raskite mažiausią spindulio R reikšmę.

Sprendimas. Apskritimas ribinėje padėtyje (žr. 3 pav.) yra simetriškas ordinačių ašies Oy atžvilgiu, todėl jo lygtis yra $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $y_0 > 0$, o ieškomas apskritimo centro O_1 atstumas iki parabolės viršūnės O yra y_0 .

Aišku, kad lietimosi taškų M ir N koordinatės turi tenkinti ir parabolės, ir apskritimo lygtį. Vadinasi, ieškant šių taškų koordinatės reikia išspręsti lygčių $y = x^2$ ir $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sistemą. Spręsdami ją, gauname:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (x^2 - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - (2y_0 - 1)x^2 + (y_0^2 - R^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 = \frac{2y_0 - 1 \pm \sqrt{(2y_0 - 1)^2 - 4(y_0^2 - R^2)}}{2}. \end{cases}$$



Kad ši sistema turėtų tik du sprendinius, turi galioti sąlyga

$$(2y_0 - 1)^2 - 4(y_0^2 - R^2) = 0,$$

iš kurios gauname sąryšį tarp R ir y_0 :

$$(4y_0^2 - 4y_0 + 1) - (4y_0^2 - 4R^2) = 0 \Rightarrow -4y_0 + 1 + 4R^2 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4} + R^2.$$

Šiuo atveju

$$x^2 = \frac{2y_0 - 1}{2} = y_0 - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} + R^2\right) - \frac{1}{2} = R^2 - \frac{1}{4}.$$

Iš sąlygos $x^2 \geq 0$, gauname mažiausią spindulio reikšmę $R = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ats.: } y_0 = \frac{1}{4} + R^2, R \geq \frac{1}{2}.$$

10. Į apskritimą įbrėžtas šešiakampis $ABCDEF$, kuriame

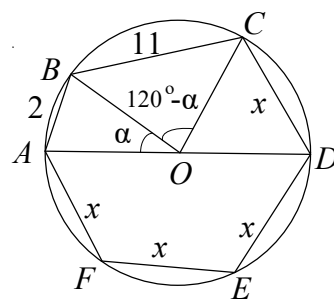
$$AB = 2, BC = 11, CD = DE = EF = FA = x.$$

Raskite x , jei AD yra šio apskritimo skersmuo.

Sprendimas. Kadangi AD yra apskritimo skersmuo (žr. 4 pav.), tai šio apskritimo spindulys yra x . Taigi

$AO = BO = CO = x$. Jei $\angle AOB = \alpha$, tai $\angle BOC = 120^\circ - \alpha$. Iš trikampių AOB ir BOC gauname, kad $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}$ ir

$$\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{11}{2x}.$$



4 pav.

Spręsdami šių lygčių sistemą gauname:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{11}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{11}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} = 12 \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ 3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 144 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 48 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ 49 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7} \text{ (nes } \frac{\alpha}{2} \in (0; 180^\circ)) \end{cases} &\Rightarrow x = 7. \end{aligned}$$

Ats.: 7.