

XXIV RASEINIŲ KRAŠTO JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADOS
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Prezidento Jono Žemaičio gimnazija, Raseiniai, 2025 m. lapkričio 28 d.

Komandinės varžybos

1. Magdalenos Raseiniškės anūkas Gervazas labai išreklamavo visus skaičius, kurie yra vienu metu ir pirminiai, ir vienaženkliai. Tada Ariogaloje susidomėta tais natūraliaisiais skaičiais, kurie dalijasi iš visų Gervazo apskelbtųjų skaičių, o Betygaloje – tais, kurių joks skaitmuo nėra vienas iš Gervazo apskelbtųjų skaičių. Kokiu skaitmeniu prasideda mažiausias skaičius, kuris sudomintų tiek Ariogalą, tiek Betygalą?

- A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 1

Sprendimas. Gervazas reklamavo skaičius 2, 3, 5 ir 7. Ariogaloje susidomėta natūraliaisiais skaičiais, kurie dalijasi iš pirminių skaičių 2, 3, 5, 7, taigi dalijasi iš sandaugos $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Tai skaičiai 210, 420, 630, 840, Mažiausieji trys iš jų nesudomintų Betygalos, nes turi skaitmenį 2 arba 3. O skaičius 840 sudomintų ne tik Ariogalą, bet ir Betygalą, nes skaitmenų 2, 3, 5, 7 neturi. Tai ir yra mažiausias tinkamas skaičius. Jis prasideda skaitmeniu 8.

Ats.: B) 8.

2. Nikodemus iš Tytuvėnų, Oresta iš Šiluvos ir Skirmantė iš Skirsnemunės iš viso turi 30 jiems visiems artimiausiu metu skaitytinų knygų. Jie dalijasi jomis, siųsdami vieni kitiems. Pirmuoju siuntimu Nikodemus išsiuntė penkias knygas Orestai, Oresta keturias knygas Skirmantei, o Skirmantė dvi knygas Nikodemui. Tada visi turėjo po lygiai tų skaitytinų knygų. Keliomis skaitytinomis knygomis daugiau pradžioje turėjo tas ar ta iš trijų draugų, kas jų turėjo daugiausiai, už tą, kas turėjo mažiausiai?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Kitas atsakymas

Sprendimas. Po pirmojo siuntimo draugai turėjo po $30 : 3 = 10$ knygų. Nikodemus siuntė 5 knygas, o gavo dvi. Taigi jo turimų knygų skaičius sumažėjo $5 - 2 = 3$, o pradžioje buvo lygus $10 + 3 = 13$. Panašiai Orestos knygų skaičius padidėjo $5 - 4 = 1$, o pradžioje buvo $10 - 1 = 9$. Skirmantės knygų skaičius padidėjo $4 - 2 = 2$, o pradžioje buvo $10 - 2 = 8$. Atsakymas lygus didžiausio ir mažiausio iš gautųjų skaičių 13, 9, 8 skirtumui $13 - 8 = 5$.

Ats.: D) 5.

3. Magdalena Raseiniškė sugalvojo dviženklį natūralųjį skaičių. Savo mokiniams – Girkalnio Giriui, Žai-ginio Žygiui ir Kryžkalnio Krizui – ji papasakojo, kad netoli nuo Nemakščių esąs toks Skirtino akmuo, kuris vidurnaktį į klausimą atsiliepiąs dviem atsakymais, iš kurių bent vienas būnas teisingas. Magdalenos mokiniai po vieną nuėjo prie akmens ir paklausė apie jos sugalvotą skaičių. Giriui akmuo atsakė: „Skaitmeniu 5 jis baigiasi. Iš 7 jis dalijasi.“ O Žygiui: „Už 20 jis didesnis. Skaitmeniu 9 jis baigiasi.“ Krizui: „Iš 12 jis dalijasi. Už 21 jis mažesnis.“ Kokiu skaitmeniu iš tikrųjų baigiasi tasai skaičius?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) Tokių skaitmenų yra bent du

Sprendimas. Jei Magdalenos skaičius a baigiasi skaitmeniu 5 arba 9, tai jis nėra lyginis ir tuo labiau nesidalija iš $12 = 2 \cdot 6$. Tada a turi būti mažesnis už 21 pagal Krizo gautus atsakymus, ir $a = 15$ arba 19. Tačiau nė vienas iš šių dviejų skaičių netenkina uždavinio sąlygos (atitinkamai pagal Žygio ir Giriaus gautus atsakymus). Vadinasi, a negali baigtis skaitmeniu 5 arba 9. Tada jis dalijasi iš 7 ir yra didesnis už 20. Kadangi nėra mažesnis už 21, skaičius a dalijasi iš 12, taigi iš $12 \cdot 7 = 84$. Vienintelis toks dviženklis natūralusis skaičius yra 84 (ir jis tenkina uždavinio sąlygą). Jis baigiasi skaitmeniu 4.

Ats.: A) 4.

4. Nikodemus iš Tytuvėnų visada atvykdavo Šiluvon su 6 mediniais skaitmenimis, iš jų sudėliodavo šešiaženklį natūralųjį skaičių ir klausinėjo šiluviškių, kaip šį skaičių patrigubinti, be šių skaitmenų nieko daugiau neturint. Tai tęsėsi, kol nepasirodė šiluviškė Oresta. Nikodemo skaičiuje ji pirmąjį skaitmenį 2 permetė į skaičiaus galą, ir skaičius kaipmat padidėjo 3 kartus. Kokia gali būti Nikodemo vežiotų 6 skaitmenų suma?

- A) 16 B) 25 C) 36 D) 32 E) 27

Sprendimas. Nikodemo skaičių be pirmojo skaitmens 2 pažymėkime x . Tada su skaitmeniu 2 jis lygus $2\overline{x} = 200\,000 + x$, o Orestos patrigubintas tampa lygus $\overline{x2} = 10x + 2$. Taigi

$$10x + 2 = 3 \cdot (200\,000 + x) = 600\,000 + 3x, \quad 7x = 10x - 3x = 600\,000 - 2 = 599\,998$$

ir $x = 599\,998 : 7 = 85\,714$. Vadinasi, Nikodemo skaitmenų suma lygi $2 + 8 + 5 + 7 + 1 + 4 = 27$.

Ats.: E) 27.

5. Kartą Oresta iš Šiluvos nusipirko knygų. Kai kurių iš jų masės galėjo būti lygios, kai kurių skirtingos, bet knygas buvo įmanoma padalyti tiek į 5 vienodos masės krūvas, tiek į 6 vienodos masės krūvas (krūvoje turi būti bent viena knyga, krūvose jų nebūtinai po tiek pat). Kiek mažiausiai knygų nusipirko Oresta?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Sprendimas. Knygų masės (nesvarbu kokiais vienetais matuojant) gali būti 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5. Tada knygas galima suskirstyti į tokias 5 arba 6 vienodos masės krūvas:

$$(1, 5) \quad (1, 5) \quad (1, 5) \quad (1, 5) \quad (1, 5) \quad \text{arba} \quad (1, 1, 1, 1, 1) \quad (5) \quad (5) \quad (5) \quad (5) \quad (5)$$

Taigi Oresta galėjo nusipirkti 10 knygų.

Tarkime, kad Oresta nusipirko 9 ar mažiau knygų. Tada suskirsčius knygas į 5 vienodos masės m krūvas, bent vienoje krūvoje yra tik viena knyga: priešingu atveju knygų būtų bent $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$. Taigi yra knyga, kurios masė yra m . Visų knygų masė lygi $5m$. Suskirsčius knygas į 6 vienodos masės krūvas, vienoje iš jų yra toji masės m knyga. Taigi tos krūvos masė ne mažesnė už m . Kita vertus, ji turi būti lygi $5m : 6 = \frac{5}{6}m < m$. Gavome prieštarą.

Vadinasi, mažiausias galimas nupirktų knygų skaičius yra 10.

Ats.: C) 10.

6. Pasirinkus bet kokį natūralųjį skaičių n , kurio visi skaitmenys nenuliniai ir ne visi yra vienodi, Kalnujuose visada atsiranda, kas sudarytų visus skirtingus skaičius (įskaitant patį skaičių n), gaunamus rikiuojant skaičiaus n skaitmenis bet kokia tvarka, ir visus taip sudarytus skaičius sudėtų, randant sumą S_n . Kartą taip gauta suma $S_N = 1221$. Kokia yra skaičiaus N skaitmens, už kurį kiti ne didesni, mažiausia galima reikšmė?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) Kitas atsakymas

Sprendimas. Jei $N < 100$, tai sumoje S_N tegali būti du dėmenys, ir tada $S_N \leq 99 + 99 < 1221$. Jei $N > 999$, tai sumoje S_N yra bent du dėmenys, didesni už 999, ir $S_N > 1221$.

Taigi skaičius N triženklis. Jei jo skaitmenys A, B, C skirtingi, tai

$$S_N = \overline{ABC} + \overline{ACB} + \overline{BAC} + \overline{BCA} + \overline{CAB} + \overline{CBA}.$$

Skaičiaus S_N paskutinį skaitmenį D lemia dėmenų paskutinių skaitmenų suma $C + B + C + A + B + A = 2A + 2B + 2C$. Kaip ir ši suma, skaitmuo D lyginis, tad $S_N \neq 1221$.

Liko galimybė, kai du iš skaičiaus N skaitmenų lygūs, o trečias kitoks: A, A ir B . Tada

$$1221 = S_N = \overline{AAB} + \overline{ABA} + \overline{BAA} = 100A + 10A + B + 100A + 10B + A + 100B + 10A + A = 111 \cdot (2A + B),$$

$$2A + B = 1221 : 111 = 11, \quad (A, B) = (1, 9), \quad (2, 7), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 1).$$

Skaičiaus N skaitmuo, už kurį kiti ne didesni (t. y. didžiausias arba vienas iš kelių tokių), atitinkamai lygus 9, 7, 5, 4, 5. Mažiausias galimas toks skaitmuo yra 4: jis gaunamas imant $N = 344, 434$ arba 443.

Ats.: E) Kitas atsakymas.

7. Raseinių krašto matematinio sporto būrelis, nesibodėdamas ir kitų sporto kryptių, surengė keturių komandų draugiškas futbolo varžybas. Kiekviena komanda po vieną kartą sužaidė su kiekviena kita, taigi iš viso buvo sužaistos 6 rungtynės. Po kiekvienų savo sužaistų rungtynių komanda gauna arba 3 taškus už pergalę, arba 1 tašką už lygiąsias, arba 0 taškų už pralaimėjimą. Sudarius rezultatų lentelę, paaiškėjo, kad viena komanda, būrelyje treniruota pačios Magdalenos Raseiniškės, surinko daugiau taškų už kiekvieną iš likusių trijų. Kiek mažiausiai taškų galėjo surinkti ši komanda?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Sprendimas. Jei visos rungtynės sužaistos lygiosiomis, tai visos komandos surinko po tiek pat taškų – prieštara uždavinio sąlygai. Jei lygiosiomis sužaistos visos rungtynės, išskyrus vienas, tai komanda, laimėjusi tas vienas ypatingas rungtynes, surinko 5 taškus, o kitos komandos mažiau (2, 3 ir 3 taškus).

Kiekvienos iš 6 rungtynių prie bendros komandų taškų sumos S prideda $1 + 1 = 2$ arba $3 + 0 = 3$ taškus. Jei lygiosiomis nesibaigė bent dvejios rungtynės, tai $S \geq 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$. Taip negalėtų būti, jei daugiausiai taškų surinkusi komanda turi 4 ar mažiau taškų: likusios trys komandos turėtų ne daugiau nei po 3 taškus, ir tada $S \leq 4 + 3 + 3 + 3 < 14$.

Vadinasi, varžybų nugalėtojai garantuotai surinko bent 5 taškus, ir toks taškų skaičius yra galimas.

Ats.: C) 5.

8. Paėmęs keturis skirtingus nelyginius skaitmenis, Protazas iš jų netyčia sudarė skaičių $n = \overline{ABCD}$, besidalijantį iš A, B, C ir D . Po to jau visai tyčia jis sugalvojo visus tokius skaičius n . Kiek jų yra?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Sprendimas. Skaitmenys A, B, C, D yra keturi iš penkių skaitmenų 1, 3, 5, 7, 9. Jei tarp jų yra skaitmuo 3 arba 9, tai skaičius n , o todėl ir jo skaitmenų suma $A + B + C + D$ dalijasi atitinkamai iš 3 arba iš 9. Todėl ši suma negali būti $3 + 5 + 7 + 9$, $1 + 5 + 7 + 9$, $1 + 3 + 7 + 9$ arba $1 + 3 + 5 + 7$. Taigi A, B, C, D yra tam tikra tvarka paimti skaitmenys 1, 3, 5, 9. Skaičius n dalijasi iš 5, todėl $D = 5$. Visi tokie $n = \overline{ABC5}$ neišvengiamai dalijasi iš 5, iš 9 (pagal skaitmenų sumą $1 + 3 + 5 + 9$), tuo labiau – iš 3 ir iš 1. Čia A, B, C – bet kokia tvarka išrikiuoti skaitmenys 1, 3, 9. Vadinasi, yra 6 tinkami skaičiai n :

1395, 1935, 3195, 3915, 9135, 9315.

Ats.: B) 6.

9. Viduklėje kažin kas užsigeidė sužinoti, kokių trikampių esama, kurių plotas būtų 150, o perimetras 60. Tuo pat buvo mostelta drąsi replika, kad jei trikampis dar ir statusis, tai nedaug tereikia veiksmų atlikti, jo įžambinės ilgio beiėskant. Kokia gi turi būti tokio stačiojo trikampio įžambinės ilgio skaitmenų suma?

- A) 7 B) 5 C) 10 D) 8 E) Galimų atsakymų yra bent du

Sprendimas. Reikiamo trikampio kraštinių ilgius pažymėkime a, b, c , čia c – įžambinės ilgis. Tada

$$\frac{ab}{2} = 150, \quad a + b + c = 60, \quad a^2 + b^2 = c^2;$$

$$60 - c = a + b, \quad (60 - c)^2 = (a + b)^2,$$

$$3600 - 120c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 600,$$

$$3600 - 120c = 600, \quad 120c = 3000, \quad c = 3000 : 120 = 300 : 12 = 100 : 4 = 25.$$

Taigi c skaitmenų suma lygi $2 + 5 = 7$.

Ats.: A) 7.

10. Nikodemus, Oresta ir Skirmantė užėjo į knygyną, norėdami nusipirkti po tokia pačią knygą, bet nepasiėmę daug pinigų. Deja, Nikodemui pritrūko trečdaliao knygos kainos, kad galėtų ją sau nusipirkti. Orestai panašiai pritrūko ketvirtadaliao kainos, o Skirmantei – penktadaliao. Jiems dar esant knygyne, knygai buvo pritaikyta 9,40 Eur nuolaida. Tada draugai, sumetę pinigus krūvon, sugebėjo nusipirkti tris tokias knygas, išleidę visus turėtus pinigus. Kiek kainavo knyga be nuolaidos?

- A) 30 Eur B) 40 Eur C) 24 Eur D) 36 Eur E) Kitas atsakymas

Sprendimas. Pritaikius nuolaidą, trys knygos atpigo $9,4 \cdot 3 = 28,2$ Eur. Draugai išleido visus pinigus. Todėl trys knygos atpigo tiksliai tiek, kiek iš viso pinigų draugams trūko pradžioje, t. y. per

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20 + 15 + 12}{60} = \frac{47}{60}$$

vienos knygos pradinės kainos. Vadinasi, pradžioje knyga kainavo

$$28,2 \cdot \frac{60}{47} = \frac{282 \cdot 6}{47} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ Eur.}$$

Ats.: D) 36 Eur.

Individualiosios varžybos

1. Magdalenos Raseiniškės anūkas Gervazas labai išreklamavo visus skaičius, kurie yra vienu metu ir pirminiai, ir vienaženkliai. Tada Ariogaloje susidomėta tais natūraliaisiais skaičiais, kurie dalijasi iš visų Gervazo apskelbtųjų skaičių, o Betygaloje – tais, kurių joks skaitmuo nėra vienas iš Gervazo apskelbtųjų skaičių. Koks yra mažiausias skaičius, kuris sudomintų tiek Ariogalą, tiek Betygalą?

Sprendimas. Žr. komandinių varžybų 1 uždavinį.

Ats.: 840.

2. Magdalena Raseiniškė sugalvojo dviženklį natūralųjį skaičių. Savo mokiniams – Girkalnio Giriui, Žaiginio Žygiui ir Kryžkalnio Krizui – ji papasakojo, kad netoli nuo Nemakščių esąs toks Skirtino akmuo, kuris vidurnaktį į klausimą atsiliepiąs dviem atsakymais, iš kurių bent vienas būnas teisingas. Magdalenos mokiniai po vieną nuėjo prie akmens ir paklausė apie jos sugalvotą skaičių. Giriui akmuo atsakė: „Skaitmeniu 5 jis baigiasi. Iš 7 jis dalijasi.“ O Žygiui: „Už 20 jis didesnis. Skaitmeniu 9 jis baigiasi.“ Krizui: „Iš 12 jis dalijasi. Už 21 jis mažesnis.“ Mokiniai kartu greitai suprato, kad žinių apie skaičių jiems pakanka, kad jį nustatytų. Koks tai skaičius ir kodėl jis vienintelis toks tegalėtų būti?

Sprendimas. Žr. komandinių varžybų 3 uždavinį.

Ats.: 84.

3. Raseinių krašto matematinio sporto būrelis, nesibodėdamas ir kitų sporto krypčių, surengė keturių komandų draugiškas futbolo varžybas. Kiekviena komanda po vieną kartą sužaidė su kiekviena kita, taigi iš viso buvo sužaistos 6 rungtynės. Po kiekvienų savo sužaistų rungtynių komanda gauna arba 3 taškus už pergalę, arba 1 tašką už lygiąsias, arba 0 taškų už pralaimėjimą. Sudarius rezultatų lentelę, paaiškėjo, kad viena komanda, būrelyje treniruota pačios Magdalenos Raseiniškės, surinko daugiau taškų už kiekvieną iš likusių trijų. Kiek mažiausiai taškų galėjo surinkti ši komanda?

Sprendimas. Žr. komandinių varžybų 7 uždavinį.

Ats.: 5.

4. Viduklėje kažin kas užsigeidė sužinoti, kokių trikampių esama, kurių plotas būtų 150, o perimetras 60. Tuo pat buvo mostelta drąsi replika, kad jei trikampis dar ir statusis, tai nedaug tereikia veiksmų atlikti, jo įžambinės ilgio beieškant. Koks gi turi būti tokio stačiojo trikampio įžambinės ilgis?

Sprendimas. Žr. komandinių varžybų 9 uždavinį.

Ats.: 25.

5. Gervazas lentoje užrašė skaičius 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jo brolis Protazas atlieka ėjimus, kiekvieno ėjimo metu laisvai pasirinkdamas 5 iš tuo metu užrašytų skaičių, juos padidindamas vienetu, likusius 5 skaičius sumažindamas vienetu, o tada 10 gautųjų rezultatų **kokia nori tvarka** užrašydamas lentoje **vietai** buvusių 10 skaičių. Protazas siekia, kad lentoje užrašyti skaičiai atrodytų taip:

$$a, a, a, b, b, b, c, c, c, c,$$

t. y. pirmieji trys skaičiai būtų lygūs, kiti trys skaičiai būtų lygūs ir paskutiniai keturi skaičiai būtų lygūs. Protazas tiki, kad tai gali pavykti, o Gervazas mano, kad tai neįmanoma. Nustatykite, kuris brolis teišus.

Sprendimas. Pradžioje turime 10 sveikųjų skaičių: 5 lyginius ir 5 nelyginius. Pridėjus ar atėmus iš sveikąjo skaičiaus vienetą, gaunamas sveikasis priešingo lyginumo skaičius: iš lyginio skaičiaus nelyginis ir atvirkščiai. Todėl kiekvienu ėjimu iš 5 lyginių ir 5 nelyginių sveikųjų skaičių vėl gaunama po 5 nelyginius ir lyginius. Jei išėtų skaičiai $a, a, a, b, b, b, c, c, c, c$, tai lyginiai galėtų būti 0, 3, 4, $3 + 3 = 6$, $3 + 4 = 7$ arba visi $3 + 3 + 4 = 10$ iš jų, bet niekaip ne 5 iš jų. Vadinasi, Gervazas teišus, kad Protazui savo sumanymo įgyvendinti nepavyks.

Ats.: Gervazas teišus.