

VII. PROGRESIJOS

(2024–2026)

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Ši jauniems matematikams pateikiama tema yra tikrai „mokyklinė“, todėl (autorius manymu) visiems uždaviniais – net galbūt pirmą kartą matomiems – turėtų pakakti vadovėliuose aiškinamos teorijos bei per pamokas įgytų įgūdžių. Vis dėlto prie vieno kito gali tekti ir ilgiau susimąstyti, kruopščiau padirbėti ieškant atsakymo.

Prisiminkime, kad realiųjų skaičių seka (x_n) vadinama:

- *aritmetinė* progresija, jeigu $x_1 \in \mathbb{R}$, o visi kiti jos nariai nusakomi formule

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

kurioje d yra kuris nors realusis skaičius;

- *geometrinė* progresija, jeigu $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$, o visi kiti jos nariai nusakomi formule

$$x_{n+1} = x_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

kurioje q yra kuris nors nelygus nuliui ($q \neq 0$) realusis skaičius.

Pagal nusistovėjusią tradiciją, savarankiškam darbui skirtoje užduotyje aritmetinė progresija žymima simboliu (a_n) , o geometrinė progresija – simboliu (b_n) . Be to, tiek viena, tiek kita progresija gali būti ne tik baigtinė, bet ir begalinė seka, – nelygu, koks uždavinys.

Trumpam sustokime prie čia nagrinėjamų išskirtinių sekų pavadinimų. Išsamiau pastudijavę, be didesnio vargo galėtume suprasti, kad kiekvieną (begalinės) aritmetinės progresijos (a_n) narį, pradedant antruoju, galima nusakyti gretimų narių aritmetiniu vidurkiu, taigi formule

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3)$$

O kiekvieną begalinės teigiamos geometrinės progresijos (b_n) narį, pradedant antruoju, galima nusakyti gretimų narių geometrinio vidurkiu

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4)$$

Aišku, kad nė vieno teiginio matematikos moksle nevalia priimti „už gryną pinigą“, jeigu jis nėra įrodytas.

1 teiginys. Begalinė realiųjų skaičių seka (x_n) yra aritmetinė progresija tik kai kiekvienas jos narys pradedant antruoju yra gretimų narių aritmetinis vidurkis, t. y.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5)$$

Irodymas. Jeigu seka (x_n) yra aritmetinė progresija, tai (pagal apibrėžimą) yra toks realusis skaičius d , kuriam esant

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tada

$$x_n = x_1 + (n-1)d = \frac{1}{2}((x_1 + (n-2)d) + (x_1 + nd)) = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}.$$

Tarę, kad sekos (x_n) nariai, pradedant antruoju, apibrėžiami (5) formule, t. y. $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$, $n = 2, 3, \dots$, patikrinkime, ar skirtumas tarp gretimų narių x_k ir x_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) yra pastovus.

Gausime, kad

$$x_{k+1} - x_k = \frac{x_k + x_{k+2}}{2} - x_k = \frac{x_{k+2} - x_k}{2} = \frac{(x_{k+2} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_k)}{2}.$$

Iš čia išplaukia, jog

$$2(x_{k+1} - x_k) = (x_{k+2} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_k) \Rightarrow x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1}.$$

Vadinasi, bet kuriam $k \in \{1; 2; 3; \dots\}$ galioja lygybė

$$x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k,$$

reiškianti, jog skirtumas tarp bet kurių sekos (x_n) gretimų narių yra toks pat.

2 teiginys. Begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) yra geometrinė progresija tik kai kiekvienas jos narys, pradedant antruoju, yra gretimų narių geometrinis vidurkis, t. y.

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

Irodymas. Tarkime, kad begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) yra geometrinė progresija. Tai reiškia, kad yra toks (teigiamas) skaičius q , kuriam esant galioja lygybė

$$x_{n+1} = qx_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tada

$$x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_{n-1} \cdot qx_n = qx_{n-1} \cdot x_n = x_n^2.$$

Iš čia išplaukia, kad $x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots$. Kitaip sakant, kiekvienas geometrinės progresijos narys, pradedant antruoju, yra gretimų narių geometrinis vidurkis.

Belieka įrodyti atvirkštinį teiginį. Tarę, kad begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) nusakoma (6) formule, turime įsitikinti, kad visi gretimų narių santykiai $\frac{x_{k+1}}{x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$, yra lygūs.

Kadangi

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\sqrt{x_k \cdot x_{k+2}}}{x_k} = \sqrt{\frac{x_{k+2}}{x_k}} = \sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}}},$$

tai

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k} \right)^2 = \frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}},$$

o iš čia išplaukia, kad tikrai $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}},$ kai $k = 1, 2, 3, \dots$

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite aritmetinės progresijos $a_1, a_2, a_3, \dots$ pirmųjų devyniolikos narių sumą, jeigu

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

2. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) – jos pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jei galioja šios dvi sąlygos:

$$a_1 + a_3 + a_5 = -12 \quad \text{ir} \quad a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80.$$

3. Aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų m narių suma S_m yra lygi jos pirmųjų k narių sumai S_k , $k \neq m$. Įrodykite, kad šiuo atveju

$$S_{m+k} = 0.$$

4. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) , kurios pirmųjų n narių suma S_n apskaičiuojama pagal formulę

$$S_n = 24n^2 + 17n.$$

5. Įrodykite, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija, jeigu jos pirmųjų n narių sumos S_n formulė yra

$$S_n = An^2 + Bn;$$

čia A ir B yra bet kurie realieji skaičiai, $A \neq 0$.

6. Nustatykite, ar yra tokia aritmetinė progresija (a_n) , kad pirmųjų n narių sumai rasti tiktų formulė

$$S_n = n^2 + 2n - 8,$$

jei n – bet kuris natūralusis skaičius.

7. Trijų skaičių, sudarančių geometrinę progresiją, suma lygi 3, o jų kvadratų suma 21. Raskite šią progresiją.

8. Skaičių 180 išskaidykite į keturis dėmenis taip, kad jie sudarytų geometrinę progresiją, kurios trečias narys 36 vienetais didesnis už pirmą narį.

9. Raskite aritmetinės progresijos (a_n) pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jeigu $S_{10} = 300$, o jos nariai a_1 , a_2 ir a_5 sudaro geometrinę progresiją.

10. Geometrinę progresiją (b_n) sudaro lyginis narių skaičius. Raskite šios progresijos vardiklį q , jei suma S_n yra tris kartus didesnė už nelyginėse pozicijose esančių narių $b_1, b_3, b_5, \dots, b_{n-1}$ sumą.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. sausio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA