

II. KETURKAMPIAI

(2025 – 2027)

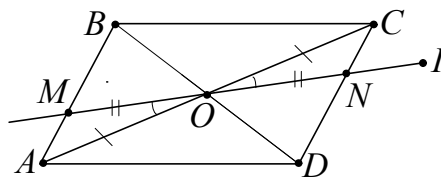
**Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas
Edmundas Mazėtis**

Matematikos pamokose mokėtės apie kai kuriuos keturkampius – lygiagretainius ir jų atskirus atvejus – rombus, stačiakampius, kvadratus, taip pat trapecijas. Atlikdami šią užduotį, ne tik papildysite žinias apie minėtas figūras, bet ir susipažinsite su kitokiais keturkampiais bei jų savybėmis.

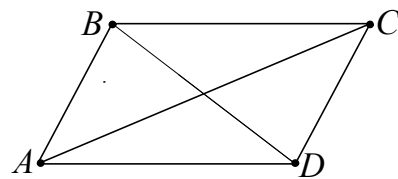
Pirmiausiai išspręsimė keletą uždavinių, kuriuose atskleidžiamos lygiagretainio savybės.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad bet kuri tiesė, einanti per lygiagretainio centrą, jo plotą dalija pusiau.

Sprendimas. Sakysime, kad tiesė l kerta lygiagretainio $ABCD$ kraštines AB ir CD



1 pav.



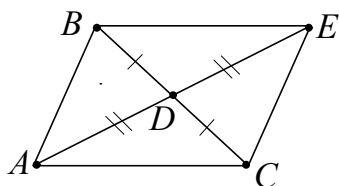
2 pav.

atitinkamai taškuose M ir N , taškas O yra lygiagretainio įstrižainių sankirtos taškas (1 pav.). Kadangi $AO = OC$, $OM = ON$, $\angle AOM = \angle NOC$, tai trikampiai AOM ir CON yra lygūs, todėl jų plotai yra vienodi. Iš čia išplaukia, kad trikampių AOM ir NOD plotų suma lygi trikampio CON plotui, kuris lygus ketvirtadaliui lygiagretainio ploto. Kadangi trikampio AOB plotas irgi lygus ketvirtadaliui lygiagretainio ploto, tai keturkampio $AMND$ plotas lygus pusei lygiagretainio ploto, ką ir reikėjo įrodyti. Lygiai taip pat įrodome, kai tiesė l kerta kraštines AD ir BC .

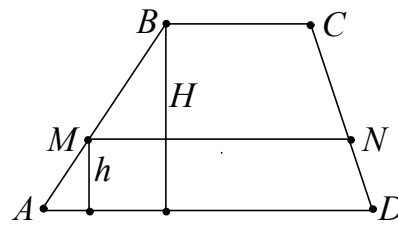
2 pavyzdys. Įrodysime, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.

Sprendimas. Sakysime, kad $ABCD$ – lygiagretainis (2 pav.). Trikampiams ABC ir ABD taikome kosinusų teoremą ir gauname, kad $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$. Kadangi $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, tai $\cos \angle ABC = -\cos \angle BAD$. Kadangi $BC = AD$, tai sudėję gautąsias lygybes, turime, kad $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, ką ir reikėjo įrodyti.

3 pavyzdys. Taikydami gautąją lygybę, išvesime trikampio pusiauakraštinės ilgio formulę. Sakysime, kad $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ – trikampio kraštinės, atkarpa AD yra jo pusiauakraštinė (3 pav.). Tiesėje AD atidėkime atkarpą DE lygią atkarpai AB . Kadangi keturkampio $ABEC$



3 pav.



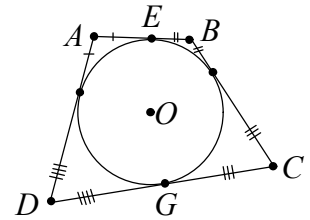
4 pav.

įstrižainės susikirtimo taške dalijamos pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis. Pagal 2 pavyzdžio lygybę $AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, todėl $AD = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

4 pavyzdys. Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs a ir b , tiesė, lygiagreti su trapecijos pagrindais, dalija trapeciją į dvi lygiaplotės trapecijas ir kerta šonines kraštines taškuose M ir N . Rasime atkarpos MN ilgį.

Sprendimas. Sakysime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = a$, $BC = b$, o lygiagreti su pagrindais tiesė šoninę kraštinę AB kerta taške M , o kraštinę CD – taške N (4 pav.). Pažymėkime trapecijos $ABCD$ aukštinę H , o trapecijos $ADNM$ aukštinę – h . Jei x – ieškomasis atkarpos MN ilgis, tai iš trapecijų $ADNM$ ir $MNCB$ plotų lygybės gauname, kad $\frac{a+x}{2} \cdot h = \frac{b+x}{2} \cdot (H-h)$. Kadangi trapecijos $ADNM$ plotas lygus pusei trapecijos $ABCD$ ploto, tai $\frac{a+x}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot H$. Iš šios lygybės gauname, kad $\frac{H}{h} = \frac{2(a+x)}{a+b}$. Pertvarkome pirmąją lygybę $a+x = (b+x) \left(\frac{H}{h} - 1 \right)$ ir įrašome gautąją santykio $\frac{H}{h}$ reikšmę. Gauname, kad $a+x = (b+x) \left(\frac{2(a+x)-a-b}{a+b} \right)$. Padauginame abi lygybės puses iš $a+b$ ir suprastiname: $(a+x)(a+b) = (b+x)(2x+a-b)$. Iš čia išplaukia, kad $a^2 = 2x^2 - b^2$, taigi ieškomasis ilgis $MN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

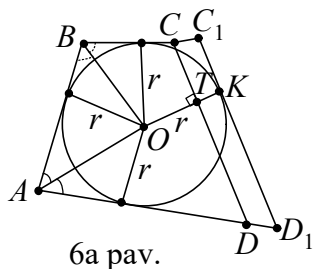
Sakysime, kad keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, taigi jo kraštinė AB liečia apskritimą taške E , kraštinė BC – taške F , kraštinė CD – taške G , o kraštinė DA – taške H (5 pav.). Taikydami iš vieno taško nubrėžtų apskritimo liestinių savybę, turime lygybes $AE = AH$, $BE = BF$, $CG = CF$, $DG = DH$, kurias sudėję gauname, kad $(AE + EB) + (CG + GD) = (AH + HD) + (BF + FC)$, taigi $AB + CD = BC + AD$.



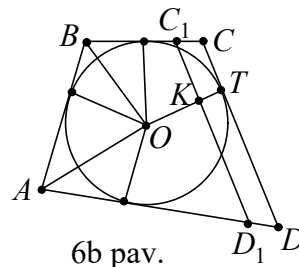
5 pav.

Įrodysime atvirkščią teiginį: jei keturkampiui $ABCD$ yra teisinga lygybė $AB + CD = BC + AD$, tai apie jį apibrėžiamas apskritimas.

Įrodymui sakysime, kad keturkampio $ABCD$ kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške O , taigi šis taškas yra vienodu atstumu r nutolęs nuo tiesių AB , AD ir BC . Nubrėžiame apskritimą, kurio centras taškas O , o spindulys lygus r . Šis apskritimas liečia tieses AB , BC ir AD . Sakysime, kad jis tiesę CD kerta dviejuose taškuose (6a pav.). Nuleiskime iš taško O statmenį OT tiesei CD ir jame atidedame atkarpą $OK = r$. Per tašką K nubrėžiame tiesę, lygiagrečią su tiese CD , kuri kerta tiesę BC taške C_1 , o tiesę AD taške D_1 . Kadangi $AK = r$ o tiesės OK ir C_1D_1 yra statmenos, tai tiesė C_1D_1 yra apskritimo liestinė, taigi keturkampis ABC_1D_1 yra įbrėžtas į apskritimą. Tuomet teisinga lygybė $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. Iš jos seka, kad $AB + C_1D_1 = BC - CC_1 + AD - DD_1$. o taip pat lygybė $AB + CD + C_1D_1 = BC + CD - CC_1 + AD - DD_1$. Pasinaudoję sąlygoje duota lygybe $AB + CD = BC + AD$ iš čia gauname, kad $C_1D_1 = CD - CC_1 - DD_1$, t. y. $CD = C_1D_1 + CC_1 + DD_1$. Bet ši lygybė neteisinga, nes keturkampio C_1D_1DC viena kraštinė negali būti lygi kitų kraštinių sumai. Taigi šis atvejis negalimas. Analogiškai nustatome, kad negalimas ir



6a pav.

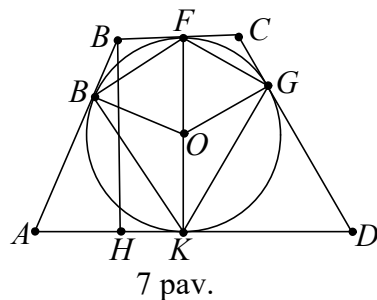


6b pav.

atvejis, kai apskritimas su tiese CD neturi bendrų taškų (6b pav.). Taigi lieka vienas atvejis, kai apskritimas tiesę CD liečia, taigi keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą.

5 pavyzdys. Apie apskritimą, kurio spindulys lygus 1, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios plotas lygus 5. Rasime keturkampio, kurio viršūnės yra apskritimo ir trapecijos kraštinių lietimosi taškai, plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad apskritimas liečia trapecijos pagrindus AD ir BC atitinkamai taškuose F ir K , o šonines kraštines AB ir CD – taškuose E ir G (7 pav.). Kadangi trapecija lygiašonė, tai tiesė FK yra jos simetrijos ašis, o atkarpa FK yra apskritimo skersmuo ir trapecijos aukštinė, taigi trapecijos aukštinė lygi 2. Kadangi atkarpa FK yra apskritimo skersmuo, tai trikampis EFK yra statusis, kaip ir jam lygus trikampis GFK . Taigi mums reikia surasti stačiojo trikampio EFK plotą. Iš trapecijos ploto formulės turime, kad $\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2 = 5$, taigi $AD + BC = 5$. Kadangi trapecija įbrėžta į apskritimą, tai $AD + BC = AB + CD = 5$, o kadangi trapecija lygiašonė, tai $AB = CD = \frac{5}{2}$. Nubrėžiame trapecijos aukštinę BH , tuomet $AH =$

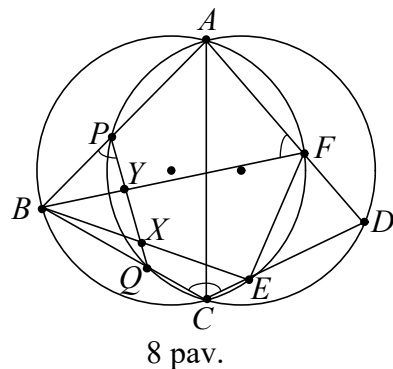


$\frac{1}{2}(AD - BC)$. Iš stačiojo trikampio ABH randame $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2}$. Iš lygybių $AD + BC = 5$, $AD - BC = 3$ randame, kad $AD = 4$, $BC = 1$. Tuomet $KA = AE = 2$, $FB = BE = \frac{1}{2}$. Iš stačiojo trikampio ABH turime, kad $\cos \angle A = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5}$, o kadangi $\angle B = 180^\circ - \angle A$, tai $\cos \angle B = -\cos \angle A = -\frac{3}{5}$. Trikampiui AEK taikome kosinusų teoremą: $EK^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos \angle A = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{5}$, analogiškai iš trikampio BEF turime $EF^2 = BE^2 + BF^2 - 2 \cdot BE \cdot BF \cdot \cos \angle B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$. Todėl trikampio EFK plotas lygus jo statinių sandaugos pusei: $S_{\triangle EFK} = \frac{1}{2}EK \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, taigi ieškomasis keturkampio $EFGK$ plotas lygus $\frac{8}{5}$.

Iš įbrėžtinių kampų savybių išplaukia, kad keturkampis yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingų kampų suma lygi 180° . Iš čia išplaukia, kad apie trapeciją yra apibrėžiamas apskritimas tik tada, kai ji yra lygiašonė.

6 pavyzdys. Duotas keturkampis $ABCD$, apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas tieses AD ir CD kerta atitinkamai taškuose F ir E , apie trikampį ACD apibrėžtas apskritimas kerta tieses AB ir BC atitinkamai taškuose P ir Q , tiesės BE ir BF kerta tiesę PQ taškuose X ir Y . Įrodysime, kad taškai E, F, X, Y yra viename apskritime.

Sprendimas. Kadangi keturkampis $ABEF$ yra įbrėžtas į apskritimą, tai $\angle BEF = 180^\circ - \angle BAF = \angle ABF + \angle AFB$. Kadangi keturkampis $ACQP$ irgi įbrėžtas į apskritimą, tai $\angle AFB = \angle ACB = \angle ACQ = 180^\circ - \angle APQ = \angle BPY$. Tuomet $\angle XEF = \angle BEF = \angle ABF + \angle AFB = \angle ABF + \angle BPY = 180^\circ - \angle BYP = \angle FYP = 180^\circ - \angle FYX$, o iš čia ie seka, kad taškai E, F, Y, X yra viename apskritime (8 pav.).



ANTROJI UŽDUOTIS

1. Iš stačiakampio $ABCD$ viršūnės A nubrėžtas statmuo AE į įstrižainę BD , taškas E dalija įstrižainę santykiu $BE : ED = 1 : 3$. Raskite atstumą nuo stačiakampio įstrižainių sankirtos taško iki kraštinės AD , jei stačiakampio įstrižainės ilgis lygus 6.
2. Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai 4 ir 8, plotas lygus 21. Kurią kraštinę (pagrindą ar šoninę kraštinę) kerta prie didesniojo pagrindo esančio kampo pusiaukampinė?
3. Į lygiašonę trapeciją yra įbrėžtas apskritimas. Raskite jo spindulio ilgį, jei trapecijos pagrindų ilgiai yra 5 ir 20.
4. Apie trapeciją apibrėžto apskritimo centras dalija jos aukštinę santykiu $3 : 4$, apskritimo spindulys lygus 10, o trapecijos vidurinė linija lygi trapecijos aukštinei. Raskite trapecijos pagrindų ilgius.
5. Apie apskritimą, kurio spindulio ilgis lygus 5, apibrėžta lygiašonė trapecija. Atstumas tarp taškų, kuriuose apskritimas liečia trapecijos šonines kraštines, lygus 8. Raskite trapecijos plotą.
6. Lygiagretainio kampų prie ilgesniosios kraštinės pusiaukampinės kerta priešingąją lygiagretainio kraštinę. Raskite, į kokio ilgio dalis yra padalijama ta kraštinė, jei lygiagretainio kraštinių ilgiai yra a) 10 ir 3; b) 10 ir 6.
7. Rombo $ABCD$ kampas BAD lygus 60° , taškai M ir N yra kraštinių BC ir CD vidurio taškai. Raskite kampą MAN .
8. Lygiagretainio smailusis kampas lygus 60° , o jo įstrižainių kvadratų santykis lygus $1 : 3$. Raskite lygiagretainio kraštinių santykį.
9. Lygiagretainio kraštinių ilgiai yra 3 ir 2. Tiesė, statmena ilgesniosioms kraštinėms, dalija lygiagretainį į dvi trapecijas, į kiekvieną tų trapecijų yra įbrėžiamas apskritimas. Raskite lygiagretainio kampus.
10. Rombo $ABCD$ kraštinėse AB ir AD pažymėti tokie taškai M ir N , kad atkarpos CM ir CN dalija rombą į tris lygiaplates dalis. Raskite atkarpos MN ilgį, jei rombo įstrižainė $BD = d$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. vasario 2 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA