

XIX SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Marijampolės Rygiškių Jono gimnazija, 2025 m. gruodžio 4 d.

Kiekviename uždavinyje ne tik nurodykite atsakymą, bet ir pagrįskite, kodėl jis ir tik jis yra teisingas.

1. Prisirpus vyšnioms Suvalkijoje, vienas žinomas Berniokas prisikrovė jų savo maišines kišenes ir, švilpaudamas bei klajodamas palei Nemuną, aplankė savo penkis draugus, juos tų vyšnių saujomis vaišindamas. Jo draugams kriūkiškiui ir joginiškiėčiui klievo iš viso 52 vyšnios, joginiškiėčiui ir plokštiškiui 43, plokštiškiui ir gelgaudiškiėčiui 34, o gelgaudiškiėčiui ir skirsnemuniškiui, pas kurį Berniokas perplaukė į kitą krantą, 30 vyšnių. Kiek vyšnių gavo kiekvienas draugas atskirai, jei Berniokas išdalino 100 vyšnių?

2. Kadaiše Raudonplynio pelkėje gyveno šimtasdviešimčiagalvė gyvatė Višakio Udenė. Jos kaklas turėjo 15 atšakų, ant kurių buvo atitinkamai po 1, 2, 3, ..., 14, 15 galvų. Su ja narsiai susikovė jotvingių galiūnas Skomantas Šiurpiliškis. Jo kardas kiekvienu kirčiu nukirsdavo kurias nors tris Udenės kaklo atšakas su visomis jų galvomis. Tačiau tuoj pat vietoj jų ataugdavo viena storesnė atšaka, turėjusi tiek galvų, kiek iš viso turėjo trys nukirstosios, ir dar papildomai n galvų (tas skaičius $n > 0$ nekito). Visgi po kelių kirčių beliko viena kaklo atšaka, kad ir apkibusi n^2 galvų, nuodingu kvapu alsavusių. Sukaupęs jėgas, Skomantas nudobė gyvatę, perkirtęs ją pusiau. Kiek kardo kirčių Skomantas atliko prieš šį paskutinį lemtingą kirtį ir kiek galvų tuo metu turėjo Udenė?

3. Juniija Genutė iš Jungėnų labai norėjo kada aplankyti Kudirkos Naumiestyje savo draugę Vincentą, bet nesiryžo vyksti tuščiomis. Pagaliau atvyko, turėdama užantyje tokią skaičių sudėtį stulpeliu:

$$\begin{array}{c} KUD \\ + IRK \\ \hline A!!! \end{array}$$

Čia 7 simboliai A, D, I, K, R, U ir $!$ reiškė 7 skirtingus skaitmenis. Šauktukas reiškė skaitmenį 0. Vincenta spėliodama, kokia čia sudėtis, kaipmat išrašė visas galimas sumos $K+U+D+I+R+K+A$ ir skaitmens K reikšmes. Kokios gi yra tos reikšmės?

4. Sesės Geltonkasės stačiakampių karpymo meistriškumo kursai ant Šešupės kranto baigėsi tuo, kad buvo iškirpta 150 popierinių stačiakampių. Karpyta iš vieno didelio popieriaus lapo, padalyto į vienodus kvadratinus langelius, ir jokiais būdais neperkerpant jokio langelio. Jokio stačiakampio nesudarė daugiau nei 21 langelis. Sesė pastebėjo, kad tada mažiausiai penki iš tų stačiakampių privalo būti vienodi. Įrodykite, kad Sesė ne tik puikiai surengė meistriškumo kursus, bet ir yra visiškai teisi, darydama tokią išvadą.

5. Vilkaviškio mokytojas Girius Vilkauskas-Žvorūnis pasiūlė savo mokiniams panagrinėti sveikųjų skaičių trejetus (x, y, z) , kuriems $xy + yz + zx = 1$, o kiekvienam tokiam trejetui – skaičių

$$U = (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2).$$

Pavyzdžiui – pastebėjo Vilkauskas – galima imti $(x, y, z) = (5, -3, 8)$, ir tada $U = 16\,900 = 130^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, nors tris kvadratus x^2, y^2, z^2 dauginame ne pačius, o padidintus 1. Mokinys Silvanas tuoj surado dar kelis tinkamus trejetus (x, y, z) , ir kaskart U vis būdavo sveikojo skaičiaus kvadratas. Mokinė Medeina nutraukė šią tikrinimo dramą sugalvojusi, kodėl taip bus visada. Kodėl gi U yra sveikojo skaičiaus kvadratas kiekvienam tinkamam trejetui (x, y, z) ?