

XIX SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADOS UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Marijampolės Rygiškių Jono gimnazija, 2025 m. gruodžio 4 d.

1. Prisirpus vyšnioms Suvalkijoje, vienas žinomas Berniokas prisikrovė jų savo maišines kišenes ir, švilpau-damas bei klajodamas palei Nemuną, aplankė savo penkis draugus, juos tų vyšnių saujomis vaišindamas. Jo draugams kriūkiškiui ir joginiškiėčiui kliuvo iš viso 52 vyšnios, joginiškiėčiui ir plokštiškiui 43, plokš-tiškiui ir gelgaudiškiėčiui 34, o gelgaudiškiėčiui ir skirsnemuniškiui, pas kurį Berniokas perplaukė į kitą krantą, 30 vyšnių. Kiek vyšnių gavo kiekvienas draugas atskirai, jei Berniokas išdalino 100 vyšnių?

Sprendimas. Kriūkiškio, joginiškiėčio, plokštiškio, gelgaudiškiėčio ir skirsnemuniškio gautą vyšnių skaičių atitinkamai pažymėkime K , J , P , G ir S . Tada

$$K + J = 52, \quad P + G = 34, \quad 100 = (K + J) + (P + G) + S = 52 + 34 + S = 86 + S.$$

Taigi $S = 100 - 86 = 14$. Toliau lengvai randame kitus nežinomuosius:

$$G = 30 - S = 16, \quad P = 34 - G = 18, \quad J = 43 - P = 25, \quad K = 52 - J = 27.$$

$$\text{Ats.: } (K, J, P, G, S) = (27, 25, 18, 16, 14).$$

2. Kadaisė Raudonplynio pelkėje gyveno šimtasdviešimčiagalvė gyvatė Višakio Udenė. Jos kaklas turėjo 15 atšakų, ant kurių buvo atitinkamai po 1, 2, 3, ..., 14, 15 galvų. Su ja narsiai susikrovė jotvingių galiūnas Skomantas Šiurpiliškis. Jo kardas kiekvienu kirčiu nukirsdavo kurias nors tris Udenės kaklo atšakas su visomis jų galvomis. Tačiau tuoj pat vietoj jų ataugdavo viena storesnė atšaka, turėjusi tiek galvų, kiek iš viso turėjo trys nukirstosios, ir dar papildomai n galvų (tas skaičius $n > 0$ nekito). Visgi po kelių kirčių beliko viena kaklo atšaka, kad ir apkibusi n^2 galvų, nuodingu kvapu alsavusių. Sukaupęs jėgas, Skomantas nudobė gyvatę, perkirtęs ją pusiau. Kiek kardo kirčių Skomantas atliko prieš šį paskutinį lemtingą kirtį ir kiek galvų tuo metu turėjo Udenė?

Sprendimas. Po kiekvieno kirčio Udenės kaklo atšakų sumažėja trimis ir padidėja viena, taigi iš viso sumažėja per $3 - 1 = 2$. Pradžioje atšakų buvo $15 = 7 \cdot 2 + 1$, taigi viena atšaka liko po 7 kirčių.

Kokia tvarka Skomantas bekapojo kaklo atšakas, bendras Udenės galvų skaičius po kiekvieno kirčio padidėdavo n . Pradžioje buvęs lygus 120, jis tapo $120 + 7n = n^2$. Išsprendę kvadratinę lygtį

$$n^2 - 7n - 120 = 0,$$

gauname sprendinius $n_1 = 15$ ir $n_2 = -8$ (netinka, nes $n > 0$). Vadinasi, $n = 15$, o Udenė prieš Skomanto pergalę turėjo $15^2 = 225$ galvas.

$$\text{Ats.: } 7 \text{ kirčiai; } 225 \text{ galvos.}$$

3. Junija Genutė iš Jungėnų labai norėjo kada aplankyti Kudirkos Naumiestyje savo draugę Vincentą, bet nesiryžo vykti tuščiomis. Pagaliau atvyko, turėdama užantyje tokią skaičių sudėtį stulpeliu:

$$\begin{array}{c} KUD \\ + IRK \\ \hline A!!! \end{array}$$

Čia 7 simboliai A , D , I , K , R , U ir $!$ reiškė 7 skirtingus skaitmenis. Šauktukas reiškė skaitmenį 0. Vincenta spėliodama, kokia čia sudėtis, kaipmat išrašė visas galimas sumos $K + U + D + I + R + K + A$ ir skaitmens K reikšmes. Kokios gi yra tos reikšmės?

Sprendimas. Kadangi $! = 0$, tai kiti skaitmenys nenuliniai. Be to,

$$\overline{A000} = \overline{KUD} + \overline{IRK} < 1000 + 1000 = 2000,$$

todėl $A = 1$. Sudėtyje stulpelių nenulinė suma $D + K < 20$ baigiasi nuliu, todėl $D + K = 10$, ir 1 lieka mintyje. Tada šioje sudėtyje $U + R + 1 < 20$ taip pat baigiasi nuliu, ir $U + R = 9$. Analogiškai $K + I = 9$. Vadinasi,

$$K + U + D + I + R + K + A = (K + I) + (U + R) + (D + K) + A = 9 + 9 + 10 + 1 = 29.$$

Liko patikrinti, ar K reikšmės 1, 2, 3, ..., 9 yra galimos. Kaskart $D = 10 - K$, $I = 9 - K$ ir $U + R = 9$. Kadangi K , I , D nesutampa su $A = 1$, tai netinka $K = 1, 8, 9$. Taip pat $K \neq 5$, nes $D = 10 - K \neq K$. Likusiais atvejais sudėtis $\overline{KUD} + \overline{IRK}$ gali būti, pavyzdžiui, tokia:

$$238 + 762, \quad 347 + 653, \quad 426 + 574, \quad 624 + 376, \quad 743 + 257.$$

Vadinasi, galimos K reikšmės yra 2, 3, 4, 6, 7.

$$\text{Ats.: } K + U + D + I + R + K + A = 29; \quad K = 2, 3, 4, 6, 7.$$

4. Sesės Geltonkasės stačiakampių karpymo meistriškumo kursai ant Šešupės kranto baigėsi tuo, kad buvo iškirpta 150 popierinių stačiakampių. Karpyta iš vieno didelio popieriaus lapo, padalyto į vienodus kvadratinus langelius, ir jokiais būdais neperkerpant jokio langelio. Jokio stačiakampio nesudarė daugiau nei 21 langelis. Sesė pastebėjo, kad tada mažiausiai penki iš tų stačiakampių privalo būti vienodi. Įrodykite, kad Sesė ne tik puikiai surengė meistriškumo kursus, bet ir yra visiškai teisi, darydama tokią išvadą.

Sprendimas. Nustatykime, kiek daugiausiai skirtingų stačiakampių galėjo būti iškirpta. Galime tarti, kad langelio kraštinės ilgis yra 1. Tada iškirptųjų stačiakampių matmenys gali būti tokie:

$$\begin{aligned} k \times 1, \quad \text{kur } k = 1, 2, \dots, 21 & \quad (21 \text{ stačiakampis}); \\ k \times 2, \quad \text{kur } k = 2, 3, \dots, 10 & \quad (9 \text{ stačiakampiai}); \\ 3 \times 3, \quad 4 \times 3, \quad 5 \times 3, \quad 6 \times 3, \quad 7 \times 3 & \quad (5 \text{ stačiakampiai}); \\ 4 \times 4, \quad 5 \times 4 & \quad (2 \text{ stačiakampiai}). \end{aligned}$$

Išvardijome visus stačiakampius, kurių plotis ne didesnis už 4. Stačiakampį $a \times b$, kur $a \geq b \geq 5$, sudarytų bent $5 \cdot 5 = 25$ langeliai. Taigi prie Šešupės kranto buvo iškirpta ne daugiau nei

$$21 + 9 + 5 + 2 = 37$$

skirtingi stačiakampiai. Jei kiekvienų matmenų stačiakampis būtų iškirptas daugiausiai 4 kartus, tai stačiakampių būtų ne daugiau nei $4 \cdot 37 = 148 < 150$. Vadinasi, tam tikrų matmenų stačiakampis buvo iškirptas bent 5 kartus. Tai ir reikėjo įrodyti.

5. Vilkaviškio mokytojas Girius Vilkauskas-Žvorūnis pasiūlė savo mokiniams panagrinėti sveikųjų skaičių trejetus (x, y, z) , kuriems $xy + yz + zx = 1$, o kiekvienam tokiam trejetui – skaičių

$$U = (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2).$$

Pavyzdžiui – pastebėjo Vilkauskas – galima imti $(x, y, z) = (5, -3, 8)$, ir tada $U = 16\,900 = 130^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, nors tris kvadratus x^2 , y^2 , z^2 dauginame ne pačius, o padidintus 1. Mokinys Silvanas tuoj surado dar kelis tinkamus trejetus (x, y, z) , ir kaskart U vis būdavo sveikojo skaičiaus kvadratas. Mokinė Medeina nutraukė šią tikrinimo dramą sugalvojusi, kodėl taip bus visada. Kodėl gi U yra sveikojo skaičiaus kvadratas kiekvienam tinkamam trejetui (x, y, z) ?

Sprendimas. Tarkime, kad (x, y, z) yra tinkamas skaičių trejetas. Tada

$$1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (z + x)y + (z + x)x = (z + x)(x + y).$$

Analogiškai $1 + y^2 = (x + y)(y + z)$ ir $1 + z^2 = (y + z)(z + x)$. Vadinasi,

$$U = (z + x)(x + y) \cdot (x + y)(y + z) \cdot (y + z)(z + x) = (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2$$

yra sveikojo skaičiaus $(x + y)(y + z)(z + x)$ kvadratas. Tai ir reikėjo įrodyti.