

ALYTAUS APSKRITIES XXV KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2025 m. gruodžio 5 d.

Uždavinių sąlygos ir sprendimai

1. Audrius gimė tą pačią dieną, kai jo motinai sukako 27 metai. Kas kiek metų Audriaus metų skaičius užsirašys dviem tais pačiais skaitmenimis, kaip ir jo motinos metų skaičius, tik atvirkščia tvarka? (Pastaba: laikykite, kad, pvz., 5 metai, t. y. 05 metai ir 50 metų tenkina uždavinio sąlygą).

Sprendimas. Sakysime, kad kažkuriuo metu Audriui bus $\overline{ab} = 10a + b$ metų, o jo motinai tuo metu bus $\overline{ba} = 10b + a$ metų. Kadangi jų metų skirtumas yra 27 metai, tai turime lygtį $\overline{ba} - \overline{ab} = 27$, t. y.

$$10b + a - (10a + b) = 27.$$

Iš čia $9b - 9a = 27$, taigi $b = a + 3$. Kadangi a ir b skaitmenys, tai $0 \leq b \leq 9$, tuomet $0 \leq a \leq 6$. Taigi kai $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $b = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Taigi kai Audriui bus 3, 14, 25, 36, 47, 58 ir 69, jo motinai bus 30, 41, 52, 63, 74, 85 ir 96 metai. Taigi uždavinio sąlygą tenkinanti situacija kartojasi kas 11 metų.

Atsakymas: kas 11 metų.

2. Vairuotojas per dieną padarė mažiau nei 11 reisų, bent po vieną kartą vykdamas į parduotuves, į bazę, į gamyklą ir pas ūkininką. Daugiausia kartų jis vyko į parduotuves, kiek mažiau kartų vyko į bazę, dar mažiau kartų vyko į gamyklą ir dar mažiau kartų – pas ūkininką. Jei reisų į parduotuves skaičių padauginume iš reisų į bazę skaičiaus, gautąjį skaičių padauginume iš reisų į gamyklą skaičiaus, o gautąjį skaičių padauginume iš reisų pas ūkininką skaičiaus, gautume skaičių, lygų vairuotojo dukros dvigubam amžiui. Kiek metų vairuotojo dukrai?

Sprendimas. Jei x, y, z, t – reisų į parduotuves, į bazę, į gamyklą ir pas ūkininką skaičius, tai pagal sąlygą $x > y > z > t$. Jei $t > 2$, tai

$$t + z + y + x > 2 + 3 + 4 + 5 = 14 > 11.$$

Taigi $t = 1$. Jei $z \geq 2$, tai

$$t + z + y + x > 1 + 3 + 4 + 5 = 13 > 11,$$

taigi $z = 2$. Analogiškai patikriname, kad kai $y > 3$, tai

$$t + z + y + x > 1 + 2 + 4 + 5 = 12 > 11,$$

taigi $y = 3$. Tuomet $t + z + y = 1 + 2 + 3 = 6$. Kadangi bendras reisų skaičius mažesnis nei 11, tai turi būti $x = 4$. Todėl vairuotojo dukrai yra

$$\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 12 \text{ metų.}$$

Atsakymas: 12 metų.

3. Duota 4 eilučių ir 4 stulpelių lentelė. Į kiekvieną jos langelį įrašoma po vieną natūralųjį skaičių nuo 1 iki 16, taip, kad kiekvienoje eilutėje, kiekviena stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje esančių skaičių sumos būtų lygios. Visi skaičiai langeliuose yra skirtingi. Į kai kuriuos lentelės langelius skaičiai jau įrašyti kaip parodyta paveikslėlyje. Baikite pildyti lentelę.

1	14		
		6	9
	11		
	2	3	16

Sprendimas. Pažymėkime neužimtus langelius (žr. pav. dešinėje). Kadangi visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 16 suma lygi $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = \frac{1+16}{2} \cdot 16 = 136$, o kiekvienoje eilutėje sumos vienodos, tai kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos įstrižainės skaičių suma lygi $136 : 4 = 34$. Tada iš paskutinės eilutės gauname $m + 21 = 34$, taigi $m = 13$. Analogiškai iš antrojo stulpelio turime

1	14	x	y
T	z	6	9
L	11	u	V
M	2	3	16

$z + 27 = 34$, todėl $z = 7$. Iš antrosios eilutės gauname, kad $t + 22 = 34$, todėl $t = 12$. Tuomet lengvai gauname, kad $l = 8$, $u = 10$, $x = 15$, $y = 4$. Taigi lentelė atrodo taip:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8, \\ xy + x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmosios lygties atėmę antrąją, gauname, kad $x + y - xy = 1$. Perkėlę vienetą į kairiąją pusę ir sugrupavę, gauname

$$x + y - xy - 1 = 0, \quad (x - 1) - (xy - y) = 0, \quad (x - 1) - y(x - 1) = 0, \quad (x - 1)(y - 1) = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad $x = 1$ arba $y = 1$. Kai $x = 1$, iš antrosios lygties gauname, kad $y + y^2 = 6$, todėl $y = 2$ arba $y = -3$. Kai $y = 1$, tai antroji lygtis yra $x + x^2 = 6$, taigi $x = 2$ arba $x = -3$.

Atsakymas: $(1, 2)$, $(1, -3)$, $(2, 1)$, $(-3, 1)$.

5. Algirdas ir Bronius tą pačią dieną išsiruošė į kelionę. Algirdas iš Alytaus išėjo 10 val. 30 min., ir atvyko į Druskininkus 15 val. 6 min., Bronius iš Druskininkų išvyko 10 val. 36 min., o atvyko į Alytų 16 val. 21 min.. Kuriuo laiku jie susitiko?

Sprendimas. 1 būdas. Algirdas keliavo $15\text{val. } 6\text{ min.} - 10\text{val. } 30\text{ min.} = 4\text{ val. } 36\text{ min.} = \frac{23}{5}\text{ val.}$, taigi jis per valandą nuėjo $\frac{5}{23}$ dalį viso kelio. Analogiškai Bronius keliavo $16\text{ val. } 21\text{ min.} - 10\text{ val. } 36\text{ min.} = 5\text{ val. } 45\text{ min.} = \frac{23}{4}\text{ val.}$, taigi per vieną valandą jis nuėjo $\frac{4}{23}$ viso kelio. Abu kartu jie per vieną valandą nuėjo $\frac{9}{23}$ viso kelio. Algirdas tuo metu, kol buvo neišėjęs Bronius, ėjo 6 minutes – t. y. $\frac{1}{10}$ val., per tą laiką jis nuėjo $\frac{5}{23} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{46}$ viso kelio. Likusią kelio dalį $1 - \frac{1}{46} = \frac{45}{46}$ jie ėjo kartu, tad iki susitikimo ėjo $\frac{45}{46} : \frac{9}{23} = \frac{5}{2}\text{ val.} = 2\text{ val. } 30\text{ min.}$. Taigi susitiko $10\text{val. } 36\text{ min.} + 2\text{val. } 30\text{ min.} = 13\text{val. } 6\text{ min.}$

2 būdas. Tarkime, atstumas tarp Alytaus ir Druskininkų yra s km. Algirdas keliavo $\frac{23}{5}\text{ val.}$, tad jo greitis $\frac{5s}{23}\text{ km/val.}$, Bronius keliavo $\frac{23}{4}\text{ val.}$, tad jo greitis $\frac{4s}{23}\text{ km/val.}$ Sakykime, kad iki susitikimo Bronius keliavo x valandų, tuomet Algirdas ėjo 6 min. ilgiau, ir jis iki susitikimo ėjo $x + \frac{1}{10}$ val. Pagal sąlygą

$$\frac{5s}{23}\left(x + \frac{1}{10}\right) + \frac{4s}{23}x = s, \quad \frac{5}{23}\left(x + \frac{1}{10}\right) + \frac{4}{23}x = 1.$$

Gautosios lygties sprendinys $x = \frac{5}{2}$, o susitikimo laikas $10\text{val. } 36\text{ min.} + 2\text{val. } 30\text{ min.} = 13\text{val. } 6\text{ min.}$

Atsakymas: 13 val. 6 min.

6. Trys broliai Antanas, Jonas ir Mykolas prieš eidami miegoti rastus grybus, kurių buvo mažiau nei 100, sudėjo į bendrą pintinę, sutarę, kad ryte pasidalys juos po lygiai. Pirmasis naktį prabudo Antanas. Jis vieną grybą padėjo į atskirą krepšelį, likusius padalijo į tris lygias dalis ir vieną dalį pasiėmė sau. Po to prabudo Jonas ir, manydamas, kad jis atsibudo pirmasis, vieną grybą įdėjo į atskirą krepšelį, likusius padalijo į tris lygias dalis ir vieną dalį pasiėmė sau. Po to prabudo Mykolas ir padarė tą patį su likusiais grybais, vėl vieną grybą įdėjo į atskirą krepšelį, kitus padalijo į tris lygias dalis ir vieną jų paėmė. Ryte visi pintinėje likusius grybus vėl pasidalijo po lygiai ir vieną likusį grybą įdėjo į atskirą krepšelį. Kiek grybų pintinėje buvo iš pradžių?

Sprendimas. Pagal sąlygą pintinėje buvusio grybų skaičiaus liekana dalijant jį iš trijų lygi 1, taigi pintinėje buvo $3x + 1$ grybas. Antanas paėmė $x + 1$ grybą, taigi po to liko $(3x + 1) - (x + 1) = 2x$ grybų. Kadangi šio skaičiaus dalybos iš 3 liekana lygi 1, tai galima parašyti $2x = 3y + 1$, todėl $y = \frac{2x-1}{3}$. Tuomet Jonas paėmė $y + 1$ grybą, pintinėje liko $2y$ grybų. Kadangi ir šį skaičių dalijant iš 3 gaunama liekana 1, tai $2y = 3z + 1$, todėl

$$z = \frac{2y-1}{3} = \frac{2 \cdot \frac{2x-1}{3} - 1}{3} = \frac{4}{9}x - \frac{5}{9}.$$

Taigi rytą pintinėje liko $2z$ grybų, bet analogiškai $2z = 3t + 1$. Iš čia

$$t = \frac{2z-1}{3} = \frac{2 \left(\frac{4}{9}x - \frac{5}{9} \right) - 1}{3} = \frac{8}{27}x - \frac{19}{27}.$$

Iš čia $8x = 27t + 19$, $x = \frac{27t+19}{8}$. Kadangi x ir t natūralieji skaičiai, tai skaičius $27t + 19$ turi dalytis iš 8. Iš čia gauname, kad t yra nelyginis skaičius. Jei $t = 1, t = 3, t = 5$ atitinkamai gauname $27t + 19 = 46, 100$ ir 154 , ir nei vienas šių skaičių nesidalija iš 8. Kai $t = 7$, turime $27t + 19 = 208 = 8 \cdot 26$, taigi $x = \frac{27 \cdot 7 + 19}{8} = 26$, todėl pintinėje iš pradžių buvo $3 \cdot 26 + 1 = 79$ grybai. Kai $t = 9$, $27t + 19$ nesidalija iš 8, o kai $t \geq 11$, gaunama $x \geq 39$, todėl grybų skaičius pintinėje viršija 100. Patikrinimui turime, kad Antanas paėmė $78 : 3 + 1 = 27$ grybus po jo paėmimo pintinėje liko 52 grybai, todėl Jonas paėmė $51 : 3 + 1 = 18$ grybų, po jo liko 34 grybai. Tuomet Mykolas paėmė $33 : 3 + 1 = 12$ grybų, o pintinėje liko 22 grybai, kuriuos ryte pasidalijo po 7 ir dar vienas liko.

Atsakymas: pintinėje buvo 79 grybai.

7. Skaičius vadinamas palindromu, jei jis lygus skaičiui, užrašytam tais pačiais skaitmenimis atvirkščia tvarka. Pvz., skaičius 25752 yra palindromas. Palindromas negali prasidėti ir baigtis skaitmeniu 0. Raskite visus keturženklis palindromus, kurie būtų lygūs dviejų triženklių palindromų sumai.

Sprendimas. Kadangi keturženklis skaičius turi būti lygus dviejų triženklių skaičių sumai, tai jis negali būti didesnis už $999 + 999 = 1998$, taigi ieškomojo palindromo pirmas ir paskutinis skaitmuo turi būti lygus 1. Žymėkime ieškomąjį skaičių $\overline{1aa1}$, o du triženklis palindromus $\overline{bcb}$ ir $\overline{ded}$. Pagal sąlygą

$$1000 + 100a + 10a + 1 = (100b + 10c + b) + (100d + 10e + d).$$

Iš šios lygybės turime, kad $1001 + 110a = 101(b + d) + 10(c + e)$. Kadangi kairioji šios lygybės pusė baigiasi vienetu, tai skaičius $b + d$ irgi turi baigtis vienetu. Kadangi b ir d yra skaitmenys, o palindromas negali prasidėti 0, tai turi būti tik $b + d = 11$. Įrašę šią lygybę gauname, kad

$$1001 + 110a = 101 \cdot 11 + 10(c + e),$$

iš čia $110a - 110 = 10(c + e)$, taigi $11(a - 1) = c + e$. Kadangi c ir e yra skaitmenys, tai $c + e \leq 18$. Iš čia $a - 1 = 0$ arba $a - 1 = 1$. Taigi $a = 1$ arba $a = 2$. Pirmuoju atveju $1111 = 505 + 606$, o antruoju $1221 = 565 + 656$.

Atsakymas: 1111 ir 1221.

8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (m, n) , kurioms teisinga lygybė $64^n + 336 = m^2$.

Sprendimas. Duotąją lygybę perrašome taip: $m^2 - 8^{2n} = 336$, taigi $(m - 8^n)(m + 8^n) = 336$. Daugiklį $m + 8^n$ ir $m - 8^n$ skirtumas lygus $2 \cdot 8^n = 2^{3n+1}$, taigi lygus dvejeta laipsniui. Skaičius 336 dviejų skaičių sandauga užrašomas taip:

$$336 = 1 \cdot 336 = 2 \cdot 168 = 3 \cdot 112 = 4 \cdot 84 = 6 \cdot 56 = 7 \cdot 28 = 8 \cdot 42 = 12 \cdot 28 = 14 \cdot 24 = 16 \cdot 21.$$

Yra tik vienas variantas, kai dviejų iš šių daliklių skirtumas yra dvejeta laipsnis: $28 - 12 = 16 = 2^4$. Taigi $3n + 1 = 4$, todėl $n = 1$, tuomet $m = \sqrt{8^2 + 336} = 20$.

Atsakymas: $m = 20$, $n = 1$.

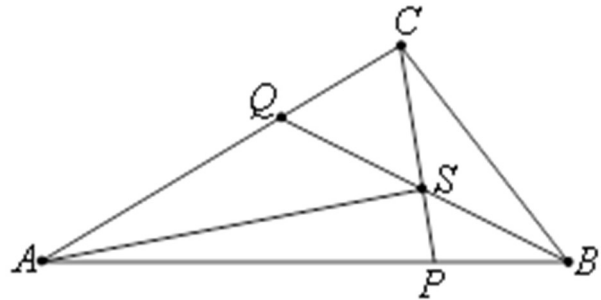
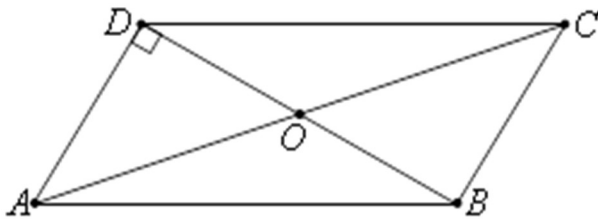
9. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė BD yra statmena kraštinei AD . Raskite įstrižainės AC ilgį, jei $AB = 9$, o $AD = 5$.

Sprendimas. 1 būdas. Tarkime, lygiagretainio įstrižainės kertasi taške O , $AD = a = 5$, $AB = b = 9$, $AC = x$, $BD = y$ (žr. pav. kairėje), tuomet $AO = \frac{1}{2}x$, $BO = \frac{1}{2}y$. Statiesiems trikampiams ADB ir AOD taikydami Pitagoro teoremą, turime lygybes $a^2 + y^2 = b^2$ ir $a^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Antrosios lygybės abi puses padauginę iš 4 ir atėmę iš jos pirmąją lygybę gauname, kad $3a^2 = x^2 - b^2$, iš čia

$$AC = x = \sqrt{3a^2 + b^2} = \sqrt{3 \cdot 5^2 + 9^2} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}.$$

2 būdas. Kadangi lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi jo įstrižainių kvadratų sumai, tai $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2) = 212$. Iš Pitagoro teoremos trikampiui ABD turime $a^2 + y^2 = b^2$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $x^2 - a^2 = 212 - b^2$, taigi $x^2 = 212 - 81 + 25 = 156$.

Atsakymas: $2\sqrt{39}$.



10. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti taškai P ir Q , atkarpos BQ ir CP kertasi taške S . Trikampių PBS , CBS ir CQS plotai atitinkamai lygūs 4, 6 ir 3. Raskite keturkampio $APSQ$ plotą.

Sprendimas. Trikampių PBS ir CBS aukštinės iš viršūnės B yra lygios, todėl jų plotų santykis lygus atkarpų PS ir CS santykiui, taigi $\frac{PS}{CS} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Analogiškai trikampių CBS ir CQS aukštinės iš viršūnės C yra vienodos, todėl jų plotų santykis lygus atkarpų BS ir QS santykiui: $\frac{BS}{QS} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$. Nubrėžkime atkarpą AS (žr. pav. dešinėje), o trikampių APS ir AQS plotus pažymėkime a ir b . Kadangi trikampių ACS ir APS aukštinės iš viršūnės A yra vienodos, todėl jų plotų santykis $\frac{b+3}{a} = \frac{CS}{SP} = \frac{3}{2}$. Trikampių AQS ir ABS aukštinės iš viršūnės A yra vienodos, todėl $\frac{b}{a+4} = \frac{QS}{SB} = \frac{1}{2}$. Iš šių lygybių gauname $2b + 6 = 3a$, $2b = a + 4$. Iš čia

$$a = 2b - 4, \quad 2b + 6 = 3(2b - 4),$$

todėl $a = 5$, $b = \frac{9}{2}$. Taigi keturkampio $APSQ$ plotas $a + b = \frac{19}{2}$.

Atsakymas: $\frac{19}{2}$.