

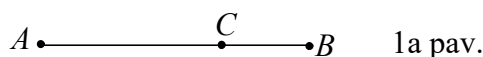
VIII. ČEVOS IR MENELAJO TEOREMOS

(2024-2026)

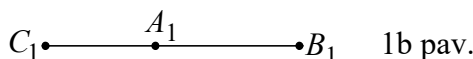
Teorinę medžiagą parengė ir aštuntąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose sužinojote, kad trikampio pusiauakraštinės susikerta viename taške, tokia pačia savybe pasižymi ir trikampio pusiauakampinės bei aukštinės. Minėtos savybės yra bendresnių teoremų, su kuriomis susipažinsite, atlikdami šią užduotį, atskiri atvejai.

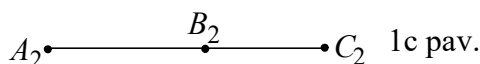
Sakykime, kad tiesėje yra trys skirtingi taškai A, B, C . Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinearieji, tai yra toks skaičius k , kad $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$. Šis skaičius k yra vadinamas trijų tiesės taškų paprastuoju santykiu, žymimas $k = (AB, C)$. Pastebėkime, kad šis santykis negali būti lygus -1 , priešingu atveju turėtume lygybę $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, taigi būtų teisingos lygybės $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, taigi taškai A ir B sutaptų. Lygiai taip pat k negali būti lygus 0 , nes tuomet sutaptų taškai A ir C . Pastebėkime, kad kai $k > 0$, taškas C yra atkarpoje AB , ir jis yra lygus atkarpų AC ir CB ilgių santykiui (1a pav.); atskiru atveju, kai $k = 1$, taškas C yra atkarpos AB vidurys. Jei $-1 < k < 0$, tai taškas A yra tarp taškų C ir B (1b pav.), o kai $k < -1$ – taškas B yra tarp taškų A ir C (1c pav.).



1a pav.



1b pav.



1c pav.

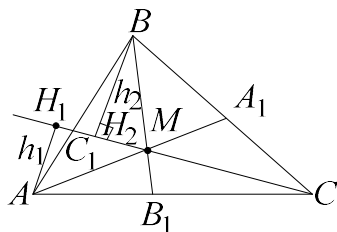
Kokie bebūtų du skirtingi taškai A ir B ir skaičius k , $k \neq 0$, $k \neq -1$, egzistuoja vienintelis tiesės AB taškas C , kad $(AB, C) = k$. Tikrai, iš paprastojo santykio apibrėžimo išplaukia lygybė $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, iš kurios gauname, kad $\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$, $(1+k)\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, todėl taškas C gaunamas nubrėžus vektorių $\overrightarrow{AC} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$. Taigi taško C egzistavimas įrodytas. Tarkime, kad tiesėje AB yra kitas taškas D toks, kad $(AB, D) = k$. Tuomet $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{DB}$, todėl $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{CB} = k(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}) = k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{DC} = -k\overrightarrow{CD}$, taigi $(1+k)\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Kadangi $k \neq -1$, tai ši lygybė galima tik kai $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$, taigi taškai C ir D sutampa.

Čevos teorema (Giovanni Ceva (1648–1734) – italų matematikas ir inžinierius). Trikampio ABC kraštinėse AB, BC ir CA atitinkamai pažymėti taškai C_1, A_1 ir B_1 . Atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

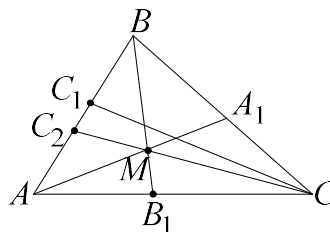
Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške M , o $AH_1 = h_1$ ir $BH_2 = h_2$ – atstumai nuo taškų A ir B iki tiesės CM (2 pav.). Tuomet $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}CM \cdot h_1$, $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}CM \cdot h_2$, tad $\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{h_1}{h_2}$. Iš trikampių AH_1C_1 ir BH_2C_1 panašumo turime $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AC_1}{C_1B}$, tad $\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Analogiškai įsitikiname, kad $\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle BMA}} = \frac{CB_1}{B_1A}$, $\frac{S_{\triangle BMA}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{BA_1}{A_1C}$. Vadinasi, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, atkarpos AA_1 ir BB_1 kertasi taške M , bet tiesė CC_1 neina per tašką M (3 pav.). Jei tiesė CM kerta trikampio kraštinę AB

taške C_2 , tai kaip įrodėme yra teisinga lygybė $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Iš šių lygybių gauname, $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Kadangi atkarpoje AB yra tik vienas taškas, dalijantis ją duotuoju santykiu, tai iš čia išplaukia, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa, taigi atkarpa CC_1 eina per tašką M .



2 pav.



3 pav.

Pastebėkime, kad Čevos teorema yra teisinga ir tada, kai vienas iš taškų A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio kraštinėje, o kiti du – kraštinių tęsinuose. Įrodymas šiuo atveju analogiškas.

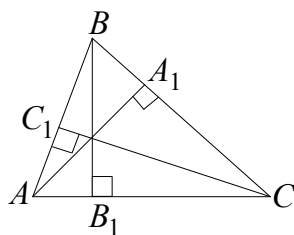
Taikant įrodytąją teoremą uždavinių sprendime, svarbu teisingai užrašyti atkarpų santykius. Galima naudoti paprastą taisyklę: pradėti nuo bet kurios trikampio viršūnės (pvz., A), eiti iki trikampio kraštinėje esančio taško C_1 , po to iki kitos viršūnės B , vėl iki kraštinėje esančio taško A_1 ir t. t., iki grįžimo į viršūnę A .

1 pavyzdys. Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC pusiauakraštinės, tai $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Taigi pagal Čevos teoremą trikampio pusiauakraštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio sunkio centru.

Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 – trikampio ABC pusiauakampinės, tai pagal trikampio pusiauakampinių savybę $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB}{BA}$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1$, taigi trikampio pusiauakampinės susikerta viename taške, kuris yra į trikampį įbrėžto apskritimo centras.

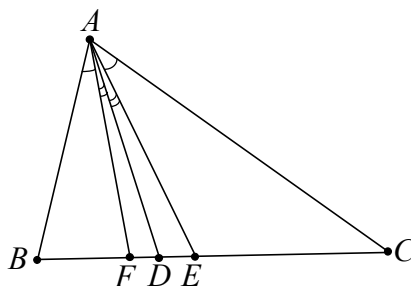
Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 – trikampio ABC aukštinės (4 pav.), tai $AC_1 = CC_1 \cotg \angle A$, $C_1B = CC_1 \cotg \angle B$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\cotg \angle A}{\cotg \angle B}$. Analogiškai $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\cotg \angle B}{\cotg \angle C}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\cotg \angle C}{\cotg \angle A}$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Taigi trikampio aukštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio ortocentru.



4 pav.

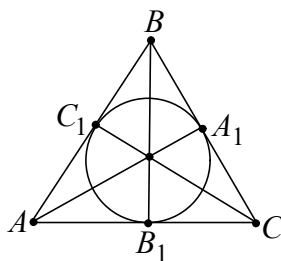
2 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC pusiauakampinė, atkarpa AE yra jo pusiauakraštinė, o kraštinėje BC yra toks taškas F , kad tiesėje AD yra kampo EAF pusiauakampinė (5 pav.). Tuomet atkarpa AF yra vadinama trikampio *simediana*. Iš apibrėžimo išplaukia, kad tiesės AE ir AF yra simetriškos tiesės AD atžvilgiu, taigi $\angle EAD = \angle FAD$, $\angle BAE = \angle CAF$, o $\angle EAC = \angle FAB$. Rasime santykį $\frac{BF}{FC}$. Sakykime, kad h yra trikampio ABC aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės A , ilgis. Dviem būdais skaičiuodami trikampio BAE plotą, turime lygybę $BE \cdot h = AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE$. Analogiškai dviem būdais skaičiuodami trikampio CAF plotą, gauname, kad $CF \cdot h = AC \cdot AF \cdot \sin \angle CAF$. Kadangi $\angle BAE = \angle CAF$, tai iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AF}$, todėl

$CF = \frac{BE \cdot AC \cdot AF}{AB \cdot AE}$. Analogiškai skaičiuodami trikampių ABF ir ACE plotus, gauname lygybes $BF \cdot h = AB \cdot AF \cdot \sin \angle BAF$ ir $CE \cdot h = AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE$. Kadangi $\angle BAF = \angle CAE$, tai iš čia turime lygybę $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AF}{AE}$, todėl $BF = \frac{CE \cdot AB \cdot AF}{AC \cdot AE}$. Kadangi taškas E yra kraštinės BC vidurys, tai $BE = CE$, todėl iš gautųjų lygybių gauname, kad $\frac{BF}{FC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Lygiai taip pat gauname lygybes ir kitoms simedianoms BG ir CH : $\frac{AG}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2}$, $\frac{BH}{HA} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Tuomet $\frac{AG}{GC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BH}{HA} = \frac{AB^2}{BC^2} \cdot \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BC^2}{AC^2} = 1$, tai iš Čevos teoremos išplaukia, kad trikampio simedianos susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio Lemuano tašku (E. Lemoine 1840 – 1912 – prancūzų matematikas).



5 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas trikampio kraštinės BC, AC ir AB liečia atitinkamai taškuose A_1, B_1, C_1 . Tuomet tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške. Iš tikrųjų, pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $AB_1 = AC_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$, $CB_1 = CA_1 = z$ (6 pav.). Todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$, taigi iš Čevos teoremos išplaukia, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio Žergono tašku (Joseph Diaz Gergonne, 1771 – 1859, prancūzų matematikas).



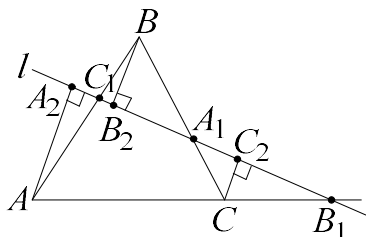
6 pav.

Menelajo teorema (Menelajas Aleksandrietis – I a. graikų mokslininkas). Sakykime, kad tiesėse BC, AC ir AB , kuriose yra trikampio ABC kraštinės, atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1 ir C_1 , be to, arba visi jie yra trikampio kraštinių tęsinuose, arba du jų yra trikampio kraštinėse, o trečiasis – kraštinės tęsinyje. Taškai A_1, B_1 ir C_1 , yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

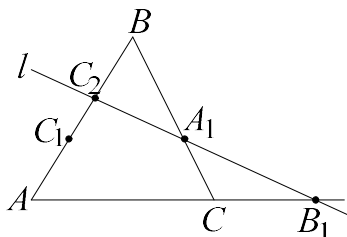
Irodymas. Būtinumas. Sakykime, kad tiesė l kerta trikampio ABC kraštinės AB ir BC taškuose C_1 ir A_1 , o kraštinės AC tęsinį – taške B_1 (7 pav.). Iš trikampio viršūnių nubrėžkime statmenis AA_2, BB_2 , ir CC_2 į tiesę l . Kadangi trikampiai AA_2C_1 ir BB_2C_1 panašieji, tai $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA_2}{BB_2}$. Analogiškai iš trikampių BA_1B_2 ir CA_1C_2 panašumo turime $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_2}{CC_2}$, o iš trikampių AB_1A_2 ir CB_1C_2 panašumo – $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CC_2}{AA_2}$. Iš čia seka, kad $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, bet taškai A_1, B_1 ir C_1 nėra vienoje tiesėje (8 pav.). Sakykime, kad tiesė A_1B_1 kerta trikampio kraštinę AB taške C_2 . Kadangi A_1, B_1 ir C_2 yra vienos tiesės taškai, tai kaip jau įrodėme, jiems teisinga lygybė $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Tuomet akivaizdu, kad $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$. Iš to, kad atkarpoje AB yra vienintelis taškas, kuris dalija ją duotuoju santykiu, tai iš šios lygybės išplaukia, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa.

Menelajo teoremos įrodymas nesikeičia, kai visi taškai A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio kraštinių tęsinuose. Norėdami teisingai surašyti atkarpų santykius, galime naudoti tą pačią taisyklę kaip ir Čevos teoremos atveju.



7 pav.

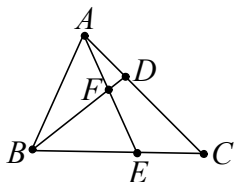


8 pav.

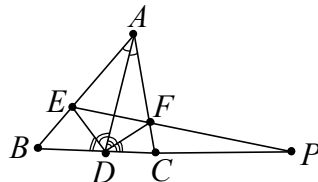
Pastebėkime, kad lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ yra tokia pati tiek Čevos, tiek Menelajo teoremos atveju. Jei rašytume ne atkarpų santykius, o trijų tiesės taškų paprastuosius santykius, tai Čevos teoremos atveju dešinėje pusėje būtų 1 (nes neigiamų paprastųjų santykių yra arba du, arba nei vieno), o Menelajo teoremos atveju dešinėje pusėje būtų -1 (nes neigiamas yra arba vienas paprastasis santykis, arba visi trys paprastieji santykiai yra neigiami). Taigi taikant paprastuosius santykius, Čevos teoremos formuluočiame esančią lygybę galima užrašyti $(AB, C_1) \cdot (BC, A_1) \cdot (CA, B_1) = 1$, o Menelajo teoremos formuluočiame esančią lygybę – taip $(AB, C_1) \cdot (BC, A_1) \cdot (CA, B_1) = -1$.

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AC yra toks taškas D , kad $AD : DC = 3 : 5$, o kraštinėje BC – toks taškas E , kad $BE : EC = 3 : 1$. Atkarpos BD ir AE kertasi taške F . Rasime $AF : FE$.

Sprendimas. Nagrinėkime trikampį AEC ir tris tiesės taškus: taškas F kraštinėje AE , taškas B – kraštinės CE tęsinyje ir taškas D – kraštinėje CA (9 pav.). Šiems taškams yra teisinga Menelajo teorema $\frac{AF}{FE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$. Kadangi $EB : BC = 3 : 4$, $CD : DA = 5 : 3$, tai iš Menelajo teoremos turime lygybę $\frac{AF}{FE} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} = 1$, iš kurios išplaukia, kad $\frac{AF}{FE} = \frac{4}{5}$.



9 pav.



10 pav.

5 pavyzdys. Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė, atkarpa DE yra trikampio ABD pusiaukampinė, atkarpa DF yra trikampio ADC pusiaukampinė, tiesės EF ir BC kertasi taške P . Įrodysime, kad tiesės AD ir AP yra statmenos.

Sprendimas. Trikampiai ABC ir trim tiesės taškams E, F, P taikome Menelajo teoremą (10 pav.): $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$. Pagal pusiaukampinių savybę $\frac{AE}{EB} = \frac{DA}{DB}$, $\frac{CF}{FA} = \frac{DC}{DA}$, todėl $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{DA}{DB} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{DC}{DB}$. Iš čia

išplaukia, kad $\frac{DC}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} = 1$, taigi $\frac{BP}{PC} = \frac{DB}{DC}$. Iš trikampio pusiaukampinės savybių gauname, kad $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, taigi $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$. Iš šios lygybės seka: AP yra trikampio ABC kampo A priekampio pusiaukampinė. Gretutinių kampų pusiaukampinės statmenos, tad iš čia išplaukia uždavinio tvirtinimas.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kratinių ilgiai $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, atkarpa AD yra pusiaukampinė, atkarpa BE yra pusiaukraštinė. Raskite į kokio ilgio atkarpa kraštinę AB dalija per atkarpą AD ir BE sankirtos tašką ir viršūnę C nubrėžta tiesė.
2. Atkarpa, jungianti trikampio ABC viršūnę A su kraštinės BC tašku A_1 tokiu, kad laužtės ABA_1 ilgis yra lygus trikampio perimetro pusei, vadinama trikampio perimetrise. Įrodykite, kad trikampio perimetrisės susikerta viename taške.
3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad tiesės MN ir BC yra lygiagrečios. Tiesės BN ir CM kertasi taške D , tiesės AD ir BC kertasi taške E . Raskite santykį $BE : EC$.
4. Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje BC , atkarpa DE yra trikampio ADC pusiaukampinė, kraštinėje AB yra toks taškas F , kad atkarpos DF ir DE yra statmenos. Įrodykite, kad atkarpos AD , BE ir CF susikerta viename taške.
5. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AB yra tokie taškai D ir E , kad $BD : DC = 5 : 3$, $AE : EB = 3 : 2$. Atkarpos AD ir CE susikerta taške F . Raskite santykius $CF : FE$ ir $AF : FD$.
6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 15$. Raskite, koku santykiu trikampio pusiaukraštinė CD dalija jo pusiaukampinę BE .
7. Trikampis ABC yra įvairiakraštis, kampo A priekampio pusiaukampinė tiesė BC kerta taške D , kampo B priekampio pusiaukampinė kerta tiesę AC taške E , o kampo C priekampio pusiaukampinė tiesę AB kerta taške F . Įrodykite, kad taškai D , E ir F yra vienoje tiesėje.
8. Trikampyje ABC teisinga lygybė $AB : AC = 20 : 11$, atkarpa AD yra jo pusiaukampinė, taškas M yra jos vidury. Koku santykiu tiesė BM dalija trikampio kraštinę AC ?
9. Taškas M yra stačiojo lygiašonio trikampio ABC statinio BC vidury, iš stačiojo kampo viršūnės C nubrėžtas statmuo pusiaukraštinei AM kerta įžambinę AB taške P . Raskite trikampio statinio AC ilgį, jei $PB = \sqrt{2}$.
10. Trikampio ABC pusiaukraštinėje AM yra toks taškas K , kad $CK = AB$, tiesės CK ir AB susikerta taške L . Įrodykite, kad trikampis AKL yra lygiašonis.

Užduties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. kovo 2 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>