

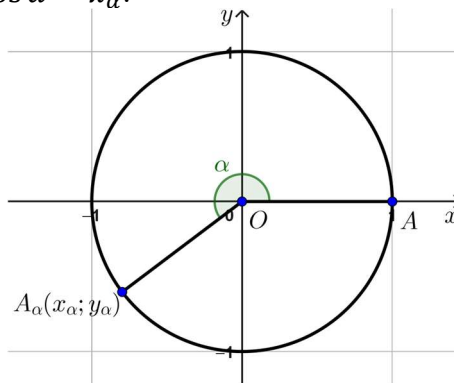
III. TRIGONOMETRINĖS NELYGYBĖS

(2025–2027)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė matematikos mokytojas ekspertas
Antanas Apynis

Prisiminkime posūkio kampo sinuso ir kosinuso apibrėžimus.

Taškas $A(1; 0)$ yra vienetinio apskritimo, kurio centras $O(0; 0)$, taškas (žr. 1 pav.). Spindulį OA pasukę kampu α prieš laikrodžio rodyklę gausime spindulį OA_α . Taško A_α koordinatės pažymėkime $(x_\alpha; y_\alpha)$. Kampo α sinusu vadinsime taško A_α ordinatę, o kampo α kosinusu – taško A_α abscisę. Taigi, $\sin \alpha = y_\alpha$ ir $\cos \alpha = x_\alpha$.



1 pav.

Vienetinio apskritimo taškų koordinatės (tiek abscisė, tiek ordinatė) priklauso intervalui $[-1; 1]$, todėl $\sin \alpha \in [-1; 1]$ ir $\cos \alpha \in [-1; 1]$.

Jeigu spindulį OA pasuktume kampais α ir $\alpha + 360^\circ$, tai gauti taškai A_α ir $A_{\alpha+360^\circ}$ sutaptų. Todėl $\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ)$ ir $\cos \alpha = \cos(\alpha + 360^\circ)$. Jeigu pasuktume spindulį OA dar 360° , vis tiek taškai A_α ir $A_{\alpha+360^\circ \cdot 2}$ sutaptų. Taigi, jeigu spindulį OA pasuktume k kartų po 360° pagal laikrodžio rodyklę, ar prieš, gautume, kad taškai A_α ir $A_{\alpha+360^\circ \cdot k}$ vis tiek sutaptų. Todėl galioja lygybės

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) \text{ ir } \cos \alpha = \cos(\alpha + 360^\circ \cdot k); \text{ čia } k \in \mathbb{Z}.$$

Kampus galime matuoti ne tik laipsniais, bet ir radianais. Todėl teisingos ir šios lygybės:

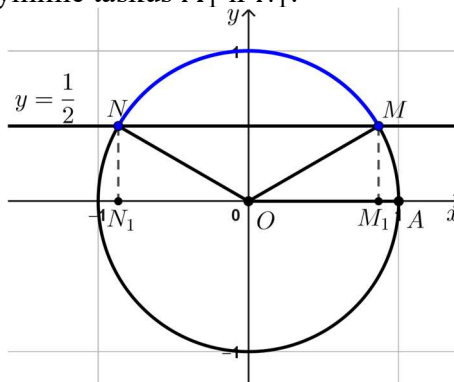
$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi \cdot k) \text{ ir } \cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi \cdot k); \text{ čia } k \in \mathbb{Z}.$$

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius, kuriuose pritaikysime šias žinias spręsdami trigonometrines nelygybes su sinusu ir kosinusu.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}$.

Sprendimas. Koordinačių plokštumoje brėžiame vienetinį apskritimą ir tiesę $y = \frac{1}{2}$ (žr. 2 pav.).

Mus domina vienetinio apskritimo taškai, esantys nežemiau tiesės $y = \frac{1}{2}$, nes tų taškų ordinatės bus nemažesnės už $\frac{1}{2}$. Vienetinio apskritimo ir tiesės sankritos taškus pažymėkime M ir N . Iš šių taškų brėžiame statmenis į Ox ašį ir pažymime taškus M_1 ir N_1 .

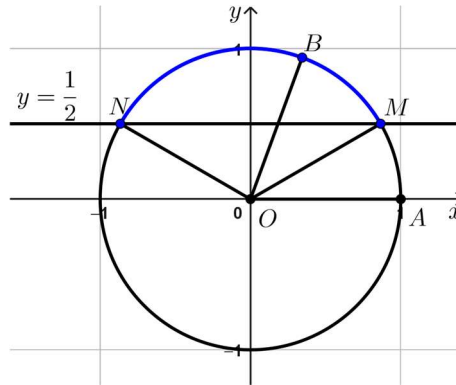


2 pav.

Taško M ordinatė yra lygi $\frac{1}{2}$, todėl $MM_1 = \frac{1}{2}$; be to, $OM = 1$. Kadangi trikampis OMM_1 yra statusis, gauname, kad $\angle MOM_1 = 30^\circ$.

Trikampiai OMM_1 ir ONN_1 yra lygūs. Todėl $\angle NON_1 = 30^\circ$. Norėdami, kad pradinis spindulys OA , sutaptų su spinduliu ON , jį turime pasukti 150° kampu, nes $\angle AON = 180^\circ - \angle NON_1 = 150^\circ$.

Gavome, kad pasukę pradinį spindulį OA kampu α , kuris priklauso intervalui $[30^\circ; 150^\circ]$, gauname spindulį OB , čia taškas B yra vienetinio apskritimo taškas, esantis ant pažymėto lanko MN (žr. 3 pav.).



3 pav.

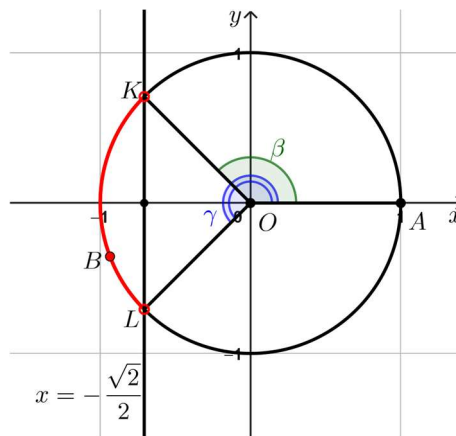
Svarbu prisiminti, kad sinuso reikšmės atsikartoja kas 360° . Todėl pasukę pradinį spindulį OA kampu α , kuris priklauso intervalui $[30^\circ + 360^\circ; 150^\circ + 360^\circ]$, gausime tą patį spindulį OB . Jeigu pradinį spindulį pasuktume k kartų pagal laikrodžio rodyklę ar prieš, tai vėl gautume spindulį OB . Todėl visus nelygybės $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}$ sprendinius galime užrašyti taip:

$$\alpha \in [30^\circ + 360^\circ \cdot k; 150^\circ + 360^\circ \cdot k], k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ats.: } \alpha \in [30^\circ + 360^\circ \cdot k; 150^\circ + 360^\circ \cdot k], k \in \mathbb{Z}.$$

2 pavyzdys. Išspręskime nelygbę $\cos \alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sprendimas. Koordinačių plokštumoje brėžiame vienetinį apskritimą ir tiesę $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (žr. 4 pav.). Pavaizduokime vienetinio apskritimo lanką KL , kurio taškai atitinka nelygybės sprendinius.



4 pav.

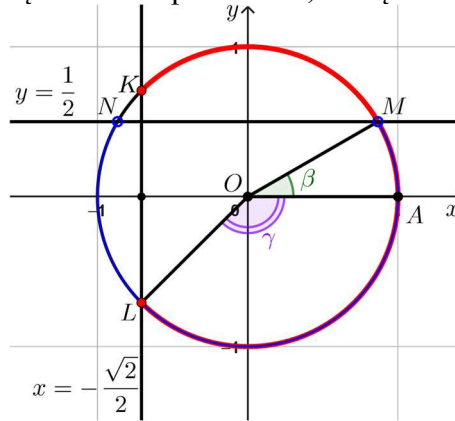
Matome, kad $\beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, nes $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tada $\gamma = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Taigi, pradinį spindulį OA pasukę kampu α , kai $\alpha \in (135^\circ; 225^\circ)$, gausime spindulį OB , čia B lanko KL taškas. Tačiau svarbu prisiminti, kad kosinuso, kaip ir sinuso, reikšmės atsikartoja kas 360° , todėl turėsime be galo daug intervalų, kurie bus nelygybės sprendinių aibės. Todėl visus šiuos intervalus galime užrašyti taip: $\alpha \in (135^\circ + 360^\circ \cdot k; 225^\circ + 360^\circ \cdot k), k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ats.: } \alpha \in (135^\circ + 360^\circ \cdot k; 225^\circ + 360^\circ \cdot k), k \in \mathbb{Z}.$$

3 pavyzdys. Nustatykite α reikšmes radianais, su kuriomis teisinga trigonometrinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} \sin \alpha < \frac{1}{2}, \\ \cos \alpha \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Sprendimas. Pavaizduokime vienetinio apskritimo tą lanką MN (mėlyna spalva), kurio taškai atitinka pirmos nelygybės sprendinius. Raudona spalva pažymėkime lanką KL , kurio taškai atitinka antros nelygybės sprendinius (žr. 5 pav.). Matome, kad šie lankai turi bendrą dalį – lanką LM . Todėl šio lanko taškai atitiks (1) nelygybių sistemos sprendinius, kurių ieškome.



5 pav.

Žinome, kad $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, todėl $\beta = \frac{\pi}{6}$. Kadangi $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tai $\gamma = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Todėl nelygybių sistemos sprendiniai yra posūkio kampai α , priklausantys intervalui

$$\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Ats.: $\alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

4 pavyzdys. Raskime (1) nelygybių sistemos sprendinius radianais, kurie priklauso intervalui $[-6; 0]$.

Sprendimas. Vienas (1) nelygybių sistemos sprendinių intervalas, kai $k = 0$, yra $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$. Šie sprendiniai turi tenkinti sąlygą $\alpha \in [-6; 0]$:

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right].$$

Kai $k = -1$, tai

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4} - 2\pi; \frac{\pi}{6} - 2\pi\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{11\pi}{4}; -\frac{11\pi}{6}\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right).$$

Kai $k > 0$ arba $k < -1$, tai (1) nelygybių sistemos sprendiniai netenkina sąlygos $\alpha \in [-6; 0]$.

Vadinasi, ieškoma sprendinių aibė yra intervalų $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$ ir $\left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right)$ sąjunga.

Ats.: $\alpha \in \left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right].$

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\frac{2 \sin^2 \alpha - \cos \alpha - 2}{\cos \alpha + 1} > 0. \quad (2)$$

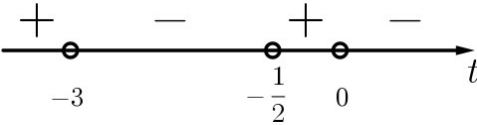
Sprendimas. Pertvarkykime šią nelygybę taip, kad joje būtų tik kampo α kosinusas:

$$\frac{2(1 - \cos^2 \alpha) - \cos \alpha - 2}{\cos \alpha + 1} > 0,$$

$$\frac{-2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 1} > 0. \quad (3)$$

Pastarąją nelygybę spręskime intervalų metodu, taikydami keitinį $\cos \alpha = t$:

$$\frac{-2t^2-t}{t+3} > 0,$$

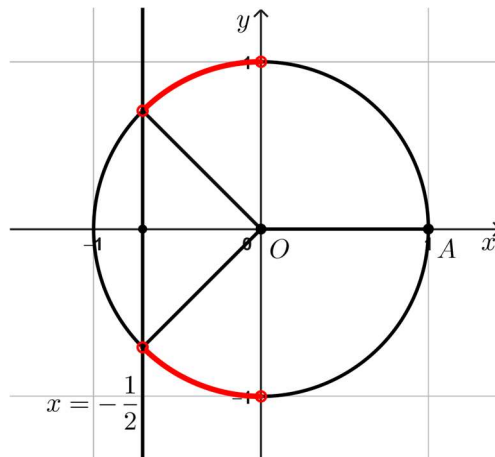
$$\frac{-2t^2-t}{t+3} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 0, t \neq -3.$$


Gauname, kad $t \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$. Taigi, $\cos \alpha < -3$ arba $-\frac{1}{2} < \cos \alpha < 0$.

(4)

Nelygybė $\cos \alpha < -3$ sprendinių neturi, nes $\cos \alpha \in [-1; 1]$.

Pavaizduokime vienetinio apskritimo lanko dalis, kurios tenkina sąlygą $-\frac{1}{2} < \cos \alpha < 0$ (žr. 6 pav.):



6 pav.

Matome, kad pavaizduotas vienetinio apskritimo lanko dalis atitinkantys posūkio kampai yra

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Vadinasi, (3), taigi ir (2) nelygybės sprendinių aibė yra

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Beje, (4) nelygybės sprendinių aibę galima užrašyti ir taip:

$$\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ats.: } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad (3) nelygybę galima nagrinėti ir kitaip, nes

$$\cos \alpha \in [-1; 1] \Rightarrow \cos \alpha + 3 \in [2; 4].$$

Kadangi (3) nelygybės kairėje pusėje esančio reiškinio vardiklio reikšmės su visomis α reikšmėmis yra teigiamos, tai (3) nelygybę galima pakeisti jai ekvivalenčia nelygybe

$$-2\cos^2 \alpha - \cos \alpha > 0.$$

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite nelygybę $2 \sin^2 \alpha - \cos \alpha \geq 1$.
2. Išspręskite nelygybę $\sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 \geq 0$.
3. Išspręskite nelygybę $\frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1}{\sin \alpha -} \geq 0$.
4. Išspręskite nelygybę $\frac{3}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \geq 0$.
5. Išspręskite nelygybę $\cos^4 \alpha < \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha$.
6. Pagrįskite, kad nelygybės $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} > \sin \alpha \cos \alpha$ sprendinių aibė yra $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
7. Išspręskite nelygybę $\frac{2 \cos \alpha - \pi}{2 \sin \alpha - 1} < 0$.
8. Raskite parametro a reikšmę, kuriai esant išsprendę nelygybę $\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq a$ gautume, kad $\alpha \in \left[\frac{7\pi}{24} + \pi k; \frac{11\pi}{24} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z}$.
9. Išspręskite nelygybių sistemą
$$\begin{cases} \sin \alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$
10. Raskite nelygybės $\cos(\alpha^2) > 0$ sprendinius radianais, kai $\alpha \in [0; 2,5]$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. kovo 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA