LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

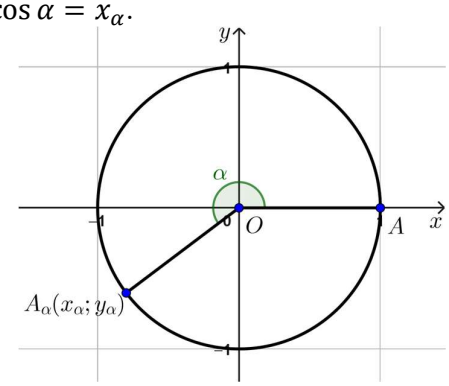
III. TRIGONOMETRINĖS NELYGYBĖS

(2025–2027)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė matematikos mokytojas ekspertas Antanas Apynis

Prisiminkime posūkio kampo sinuso ir kosinuso apibrėžimus.

Taškas $A(1;0)$ yra vienetinio apskritimo, kurio centras $O(0;0)$, taškas (žr. 1 pav.). Spindulį OA pasukę kampu α prieš laikrodžio rodyklę gausime spindulį OA_α. Taško A_α koordinates pažymėkime $(x_\alpha; y_\alpha)$. Kampo α sinusu vadinsime taško A_α ordinatę, o kampo α kosinusu – taško A_α abscisę. Taigi, $\sin\alpha = y_\alpha$ ir $\cos\alpha = x_\alpha$.



1 pav.

Vienetinio apskritimo taškų koordinatės (tiek abscisė, tiek ordinatė) priklauso intervalui $[-1;1]$, todėl $\sin\alpha \in [-1;1]$ ir $\cos\alpha \in [-1;1]$.

Jeigu spindulį OA pasuktume kampais α ir $\alpha + 360°$, tai gauti taškai A_α ir $A_{\alpha+36}$ ◦ sutaptų. Todėl $\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°)$ ir $\cos\alpha = \cos(\alpha + 360°)$. Jeigu pasuktume spindulį OA dar 360°, vis tiek taškai A_α ir $A_{\alpha+360°\cdot 2}$ sutaptų. Taigi, jeigu spindulį OA pasuktume k kartų po 360° pagal laikrodžio rodyklę, ar prieš, gautume, kad taškai A_α ir $A_{\alpha+360°\cdot k}$ vis tiek sutaptų. Todėl galioja lygybės

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°\cdot k) \text{ ir } \cos\alpha = \cos(\alpha + 360°\cdot k); \text{ čia } k \in \mathbb{Z}.$$

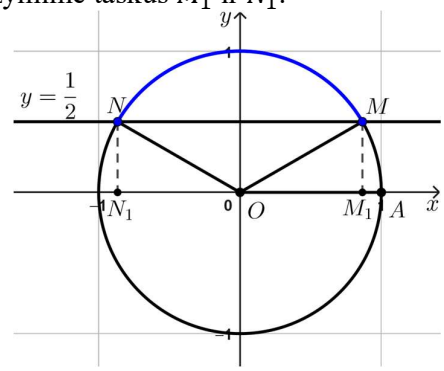
Kampus galime matuoti ne tik laipsniais, bet ir radianais. Todėl teisingos ir šios lygybės:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi\cdot k) \text{ ir } \cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi\cdot k); \text{ čia } k \in \mathbb{Z}.$$

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius, kuriuose pritaikysime šias žinias spręsdami trigonometrines nelygybes su sinusu ir kosinusu.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Sprendimas. Koordinačių plokštumoje brėžiame vienetinį apskritimą ir tiesę $y = \frac{1}{2}$ (žr. 2 pav.). Mus domina vienetinio apskritimo taškai, esantys nežemiau tiesės $y = \frac{1}{2}$, nes tų taškų ordinatės bus nemažesnės už $\frac{1}{2}$. Vienetinio apskritimo ir tiesės sankritos taškus pažymėkime M ir N. Iš šių taškų brėžiame statmenis į Ox ašį ir pažymime taškus M_1 ir N_1.

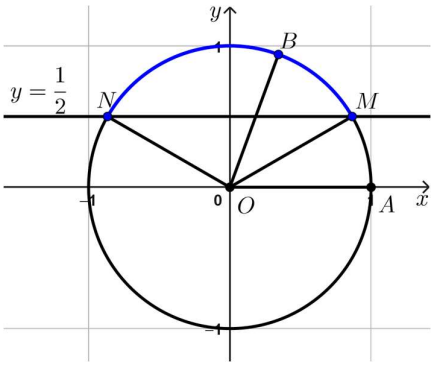


2 pav.

Taško M ordinatė yra lygi $\frac{1}{2}$, todėl $MM_1 = \frac{1}{2}$; be to, $OM = 1$. Kadangi trikampis OMM_1 yra statusis, gauname, kad $\angle MOM_1 = 30°$.

Trikampiai OMM_1 ir ONN_1 yra lygūs. Todėl $\angle NON_1 = 30°$. Norėdami, kad pradinis spindulys OA, sutaptų su spinduliu ON, jį turime pasukti $150°$ kampu, nes $\angle AON = 180° - \angle NON_1 = 150°$.

Gavome, kad pasukę pradinį spindulį OA kampu α, kuris priklauso intervalui $[30°; 150°]$, gauname spindulį OB, čia taškas B yra vienetinio apskritimo taškas, esantis ant pažymėto lanko MN (žr. 3 pav.).



3 pav.

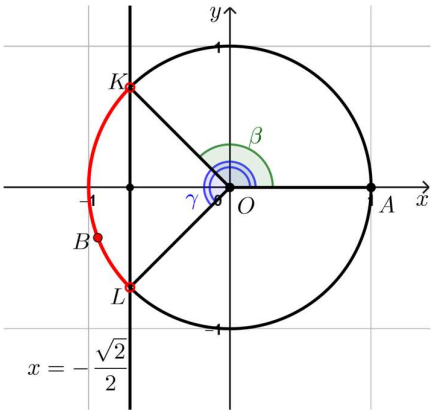
Svarbu prisiminti, kad sinuso reikšmės atsikartoja kas $360°$. Todėl pasukę pradinį spindulį OA kampu α, kuris priklauso intervalui $[30° + 360°; 150° + 360°]$, gausime tą patį spindulį OB. Jeigu pradinį spindulį pasuktume k kartų pagal laikrodžio rodyklę ar prieš, tai vėl gautume spindulį OB. Todėl visus nelygybės $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$ sprendinius galime užrašyti taip:

$$\alpha \in [30° + 360° \cdot k; 150° + 360° \cdot k],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ats.: $\alpha \in [30° + 360° \cdot k; 150° + 360° \cdot k],\ k \in \mathbb{Z}$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\cos\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sprendimas. Koordinačių plokštumoje brėžiame vienetinį apskritimą ir tiesę $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (žr. 4 pav.). Pavaizduokime vienetinio apskritimo lanką KL, kurio taškai atitinka nelygybės sprendinius.



4 pav.

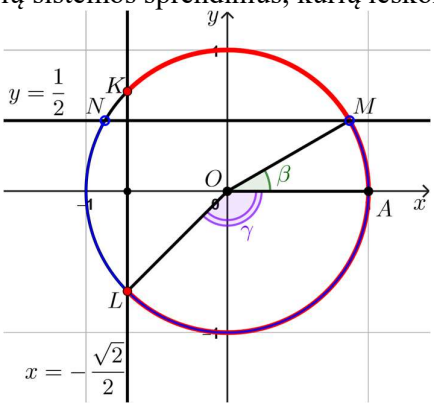
Matome, kad $\beta = 180° - 45° = 135°$, nes $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tada $\gamma = 180° + 45° = 225°$. Taigi, pradinį spindulį OA pasukę kampu α, kai $\alpha \in (135°; 225°)$, gausime spindulį OB, čia B lanko KL taškas. Tačiau svarbu prisiminti, kad kosinuso, kaip ir sinuso, reikšmės atsikartoja kas $360°$, todėl turėsime be galo daug intervalų, kurie bus nelygybės sprendinių aibės. Todėl visus šiuos intervalus galime užrašyti taip: $\alpha \in (135° + 360° \cdot k; 225° + 360° \cdot k),\ k \in \mathbb{Z}$.

Ats.: $\alpha \in (135° + 360° \cdot k; 225° + 360° \cdot k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3 pavyzdys. Nustatykime α reikšmes radianais, su kuriomis teisinga trigonometrinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} \sin\alpha < \frac{1}{2}, \\ \cos\alpha \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Sprendimas. Pavaizduokime vienetinio apskritimo tą lanką *MN* (mėlyna spalva), kurio taškai atitinka pirmos nelygybės sprendinius. Raudona spalva pažymėkime lanką *KL*, kurio taškai atitinka antros nelygybės sprendinius (žr. 5 pav.). Matome, kad šie lankai turi bendrą dalį – lanką *LM*. Todėl šio lanko taškai atitiks (1) nelygybių sistemos sprendinius, kurių ieškome.



5 pav.

Žinome, kad $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, todėl $\beta = \frac{\pi}{6}$. Kadangi $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tai $\gamma = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Todėl nelygybių sistemos sprendiniai yra posūkio kampai α, priklausantys intervalui

$$\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Ats.: $\alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

4 pavyzdys. Raskime (1) nelygybių sistemos sprendinius radianais, kurie priklauso intervalui $[-6; 0]$.

Sprendimas. Vienas (1) nelygybių sistemos sprendinių intervalas, kai $k = 0$, yra $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$. Šie sprendiniai turi tenkinti sąlygą $\alpha \in [-6; 0]$:

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right].$$

Kai $k = -1$, tai

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4} - 2\pi; \frac{\pi}{6} - 2\pi\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{11\pi}{4}; -\frac{11\pi}{6}\right), \\ \alpha \in [-6; 0] \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right).$$

Kai $k > 0$ arba $k < -1$, tai (1) nelygybių sistemos sprendiniai netenkina sąlygos $\alpha \in [-6; 0]$. Vadinasi, ieškoma sprendinių aibė yra intervalų $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$ ir $\left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right)$ sąjunga.

Ats.: $\alpha \in \left[-6; -\frac{11\pi}{6}\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$.

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\frac{2\sin^2\alpha - \cos\alpha - 2}{\cos\alpha + 3} > 0. \quad (2)$$

Sprendimas. Pertvarkykime šią nelygybę taip, kad joje būtų tik kampo α kosinusas:

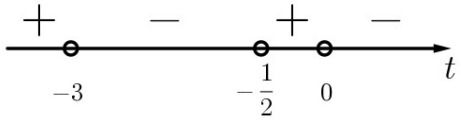
$$\frac{2(1-\cos^2\alpha) - \cos\alpha - 2}{\cos\alpha + 3} > 0,$$

$$\frac{-2\cos^2\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha +} > 0. \quad (3)$$

Pastarąją nelygybę spręskime intervalų metodu, taikydami keitinį $\cos\alpha = t$:

$$\frac{-2t^2-t}{t+3} > 0,$$

$$\frac{-2t^2-t}{t+3} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 0, t \neq -3.$$

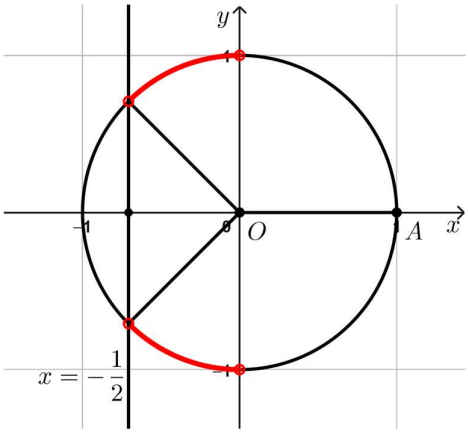


Gauname, kad $t \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Taigi, $\cos\alpha < -3$ arba

$$-\frac{1}{2} < \cos\alpha < 0. \quad (4)$$

Nelygybė $\cos\alpha < -3$ sprendinių neturi, nes $\cos\alpha \in [-1; 1]$.

Pavaizduokime vienetinio apskritimo lanko dalis, kurios tenkina sąlygą $-\frac{1}{2} < \cos\alpha < 0$ (žr. 6 pav.):



6 pav.

Matome, kad pavaizduotas vienetinio apskritimo lanko dalis atitinkantys posūkio kampai yra

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Vadinasi, (3), taigi ir (2) nelygybės sprendinių aibė yra

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Beje, (4) nelygybės sprendinių aibę galima užrašyti ir taip:

$$\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Ats.: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

Atkreipkime dėmesį, kad (3) nelygybę galima nagrinėti ir kitaip, nes

$$\cos\alpha \in [-1; 1] \Rightarrow \cos\alpha + 3 \in [2; 4].$$

Kadangi (3) nelygybės kairėje pusėje esančio reiškinio vardiklio reikšmės su visomis α reikšmėmis yra teigiamos, tai (3) nelygybę galima pakeisti jai ekvivalenčia nelygybe

$$-2\cos^2\alpha - \cos\alpha > 0.$$

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite nelygybę $2\sin^2\alpha - \cos\alpha \geq 1$.

2. Išspręskite nelygybę $\sin^3\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 \geq 0$.

3. Išspręskite nelygybę $\frac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1}{\sin\alpha - 1} \geq 0$.

4. Išspręskite nelygybę $\frac{3}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha} \geq 0$.

5. Išspręskite nelygybę $\cos^4\alpha < \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha$.

6. Pagrįskite, kad nelygybės $\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} > \sin\alpha\cos\alpha$ sprendinių aibė yra $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Išspręskite nelygybę $\frac{2\cos\alpha - \pi}{2\sin\alpha - 1} < 0$.

8. Raskite parametro a reikšmę, kuriai esant išsprendę nelygybę $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq a$ gautume, kad $\alpha \in \left[\frac{7\pi}{24} + \pi k; \frac{11}{24} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \sin\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

10. Raskite nelygybės $\cos(\alpha^2) > 0$ sprendinius radianais, kai $\alpha \in [0; 2{,}5]$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. kovo 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA