

# LIETUVOS JAUNŪJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

## IV. ŽAIDIMAI SU SKAIČIAIS

(2025–2027)

### Teorinę medžiagą parengė ir ketvirtąją užduotį sudarė doc. Romualdas Kašuba

Žaidimai su skaičiais būna maždaug dvejopi – vieni iš jų yra kiek lengvesni, o kiti būna ir kažkiek sunkesni. Mes gal pradėtume nuo kiek lengvesnių, nes nenorime gąsdinti nei savęs, nei galimų savųjų skaitytojų.

**1 pavyzdys.** Ar egzistuoja toks skaičius  $n$ , kad skaičiaus  $n$  faktorialas  $n!$  baigiasi lygiai 154 nuliais? (Skaičiaus  $n$  faktorialas  $n!$  yra sandauga  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .)

**Sprendimas.** Skaičiaus  $n$  faktorialo  $n!$  baigiamųjų nulių skaičius yra lygus 5 laipsniui skaičiaus  $n!$  išdėstyme. Tuo atveju, kai  $n \geq 625$ , tas 5-to laipsnis  $n!$  išdėstyme yra mažiausiai lygus  $125 + 25 + 5 + 1 = 156$ . Taip yra todėl, kad kas penktas skaičius nuo 1 iki  $n$  tikrai dalijasi iš 5, todėl kai  $n \geq 625$ , tokių skaičių bus mažiausiai  $625 : 5 = 125$ , kas 25-tas skaičius dalijasi iš dar vienu vienetu didesnio penketo laipsnio arba iš penkių kvadrato ir tada prie tokių skaičių, kurie yra penketo laipsniai, dar prisidės mažiausiai  $625 : 25 = 25$ . Toliau, kas 125-tas skaičius dalinsis iš dar vienu didesnio penketo laipsnio, arba 5 kubo, ir tada prie tokių skaičių, kurie yra penketo laipsniai, dar prisidės mažiausiai  $625 : 125 = 5$  tokie skaičiai. Galiausiai, kas 625-tas skaičius dalijasi iš penketo, pakelto ketvirtuoju laipsniu, ir prie penketo laipsnių prisidės dar mažiausiai  $625 : 625 = 1$ . Todėl ir sakėme, kad tuo atveju, kai  $n \geq 625$ , tas 5-to laipsnis  $n!$  išdėstyme yra mažiausiai  $125 + 25 + 5 + 1 = 156$ . O tuo atveju, kai  $n < 625$ , tas laipsnis tikrai neviršija  $156 - 4 = 152$ . Taigi, tokio  $n!$ , kad  $n!$  baigtųsi lygiai 154 nuliais, nėra.

**Atsakymas.** Tokio faktorialo  $n!$ , kad  $n!$  baigtųsi lygiai 154 nuliais, nėra.

**2 pavyzdys.** Išspręskite lygčių sistemą

$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{y-2}{xy-4} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2}.$$

**Sprendimas.** Sakykime, kad kiekvienos trupmenos reikšmė yra lygi  $t$ , tada “išsilaisvinę” iš vardiklių turėsime

$$\begin{cases} x-1 = t(xy-3), \\ y-2 = t(xy-4), \\ 3-x-y = t(7-x^2-y^2). \end{cases}$$

Jeigu mes visas tas tris lygtis sudėtume, tai gautume  $t(x-y)^2 = 0$ . Taigi dabar turime du atvejus. Jeigu  $t = 0$ , tai  $x = 1$  ir  $y = 2$ . O jeigu  $x = y$ , tai iš pradinių lygčių seka, kad  $x = -1$ . Vadinasi, mes turime du atsakymus  $(x; y) = (1; 2)$  ir  $(-1; -1)$ .

**Atsakymas.**  $(1; 2)$  ir  $(-1; -1)$ .

**3 pavyzdys.** Keturi studentai, Gintas, Vaidas, Henrikas ir Andrius rašė sunkų testą. Yra žinoma, kad jie nežinoma eile iš to sunkaus testo gavo 2, 12, 86 ir 6 taškus. Be to, mes žinome dar štai ką:

- (A) Gintas gavo pampam taškų negu Henrikas;
- (B) Henrikas gavo pampam taškų negu Vaidas;
- (C) Andrius gavo pampam taškų negu Vaidas;
- (D) Gintas gavo pampam taškų negu Andrius.

Žodis pampam turi reikšmę „daugiau“ arba „mažiau“ ir visais keturiais atvejais vieną ir tą pačią. Nustatykite Andriaus ir Henriko surinktų taškų sumą.

**Sprendimas.** Tuo atveju, kai pampam reiškia „daugiau“, Gintas surenka daugiausiai taškų, o Vaidas mažiausiai.

Jeigu pampam reiškia „mažiau“, tai viskas yra atvirkščiai, Vaidas surenka daugiausiai taškų, o Gintas mažiausiai.

Abiem atvejais Henrikas su Andriumi surenka  $6 + 12 = 18$  taškų.

**Atsakymas.** Henrikas su Andriumi kartu surenka 18 taškų.

**4 pavyzdys.** Trys žaidėjai žaidė azartinius žaidimus iš pinigų. Prasidedant žaidimui jų pinigai buvo pasiskirstę santykiu  $6 : 5 : 4$ , o žaidimui baigiantis tas santykis buvo  $7 : 6 : 5$ . Vienas iš žaidėjų laimėjo 3 eurus. Kiek pinigų jis turėjo žaidimui baigiantis?

**Sprendimas.** Mes galime tarti, kad bendras pas visus 3 žaidėjus buvusių pinigų skaičius yra  $270x$ . Tada žaidimo pradžioje pirmasis žaidėjas turėjo  $108x$ , antrasis –  $90x$ , o trečiasis –  $72x$ , o žaidimui baigiantis pirmasis turėjo  $105x$ , antrasis –  $90x$ , o trečiasis –  $75x$ . Taigi trečiasis žaidėjas yra vienintelis laimėtojas ir jis laimėjo  $75x - 72x = 3x = 3$  eurus. Taigi  $x = 1$  ir žaidimui baigiantis trečiasis žaidėjas turėjo 75 eurus.

**Atsakymas.** Trečiasis žaidėjas turėjo 75 eurus.

**5 pavyzdys.** Turime funkciją  $f(x)$ , apibrėžtą realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančią realiąsias reikšmes, nusakomą formule  $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$  ir tenkinančią sąlygą  $f(3) = 5$ . Ar tada galima manyti, kad: A)  $f(0) = 2$ , B)  $f(-3) = -5$ , C)  $f(-3) = -1$ , D)  $f(3) + f(-3) = 8$ ?

**Sprendimas.** Aišku, kad A yra teisinga. Taip pat yra aišku, kad  $f(3) + f(-3) = 4$  ir todėl  $f(-3) = -1$ . Todėl C yra teisinga, o B ir D neteisinga.

**Atsakymas.** A ir C yra teisinga, o B ir D – neteisinga.

**6 pavyzdys.** Kurie iš teiginių apie skaičių 211 yra teisingi?

- (A) Skaičius 211 yra pirminis skaičius.
- (B) Skaičius 211 yra dviejų pirminių skaičių sandauga.
- (C) Skaičius 211 yra dviejų pirminių skaičių suma.
- (D) Skaičius 211 yra trijų pirminių skaičių suma.

**Sprendimas.** Standartinis patikrinimas rodo, kad skaičius 211 iš tikrųjų yra pirminis skaičius, nes jis nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7, nei iš 11 nei iš 13, o tai yra visi pirminiai skaičiai, mažesni už kvadratinę šaknį iš 211, kuri yra skaičius tarp 14 ir 15. Taigi teiginys A yra teisingas, o teiginys B yra neteisingas. Toliau nelyginis skaičius yra dviejų pirminių skaičių suma, jeigu vienas iš tų skaičių yra lygus 2. Tačiau taip nėra, nes  $209 = 19 \cdot 11$  ir, vadinas, teiginys C yra neteisingas. Toliau, 211 gali būti keliais būdais užrašytas kaip trijų pirminių skaičių suma, pavyzdžiui, taip:  $211 = 101 + 97 + 13$ , todėl teiginys D yra teisingas.

**Atsakymas.** A ir D yra teisingi, B ir C yra neteisingi teiginiai.

**7 pavyzdys.** Tarkime, kad  $x \neq 1$ ,  $y \neq 1$  ir  $x \neq y$ . Parodykite, jog jeigu  $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y}$ ,

tada 
$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

**Sprendimas.** Tegul

$$\lambda = \frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

arba  $\lambda(1 - x) = yz - x^2$  ir  $\lambda(1 - y) = zx - y^2$ . Kadangi  $x \neq y$ , tai mes turime, kad

$$\lambda = \frac{\lambda(y-x)}{y-x} = \frac{\lambda(1-x) - \lambda(1-y)}{y-x} = \frac{yz - x^2 - zx + y^2}{y-x} = \frac{y(x+y+z) - x(x+y+z)}{y-x} = x + y + z.$$

**8 pavyzdys.** Duoti 7 skirtingi natūralieji (sveikieji teigiami) skaičiai. Yra žinoma, kad lygiai 5 iš jų dalijasi iš 2, lygiai penki dalijasi iš 3 ir lygiai penki iš jų dalijasi iš 5. Kokią pačią mažiausiąją reikšmę gali įgyti pats didžiausias iš tų 7 skaičių?

**Sprendimas.** Iš pradžių pabraukime visus skaičius, kurie dalijasi iš 3, o po to visus, kurie dalijasi be liekanos iš 5. Pabraukymo veiksmą darėme 10 kartų, vadinasi, iš tų 7 mūsų pradžios skaičių bent 3 skaičiai yra pabraukti 2 kartus, tai yra, jie dalijasi ir iš 3, ir iš 5, taigi ir iš 15. Todėl tie trys skaičiai yra ne mažesni negu, atitinkamai, skaičiai  $15 \cdot 1$ ,  $15 \cdot 2$  ir  $15 \cdot 3$ . Todėl pats didžiausias iš tų 7 skaičių yra nemažesnis negu  $15 \cdot 3 = 45$ .

Liko surasti tokių 7 skaičių pavyzdį, kuris tenkintų uždavinio sąlygas ir kurio pats didžiausias skaičius būtų 45. Tinka, pavyzdžiui 7 skirtingų skaičių rinkinys  
10, 12, 15, 18, 20, 30, 45.

Didžiausias iš tų 7 skaičių yra 45, ir jie tenkina uždavinio sąlygas: iš 2 dalijasi lygiai penki skaičiai 10, 12, 18, 20 ir 30, iš 3 irgi lygiai penki skaičiai 12, 15, 18, 30 ir 45. Taip pat lygiai 5 iš jų dalijasi be liekanos iš 5 – tai skaičiai 10, 15, 20, 30, 45.

**Atsakymas.** 45.

**9 pavyzdys.** Vienoje lentos eilutėje užrašyti visi sveikieji teigiamieji skaičiai 13 kartotiniai, pradedant nuo paties pirmojo arba skaičiai

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, 143, ...,

o kitoje po jais užrašytos tų kartotinių skaitmenų sumos arba skaičiai

4, 8, 12, 7, 11, 15, 10, 5, 9, 4, 8, ...

Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti antrosios eilutės skaitmenų suma?

**Sprendimas.** Kadangi natūraliojo skaičiaus kartotiniai patys yra sveikieji teigiami skaičiai, o pats mažiausias natūralusis yra 1, tai nuo jo ir pradėsime. Jeigu antrojoje eilutėje pasitaiko toks skaičius, tai antroje eilutėje atsiranda toks 13 kartotinis, kuris yra lygus 1 su po jo galimai einančiais keliais nuliais. Tačiau toks skaičius negali būti skaičiaus 13 kartotinis, nes jis išsiskaido tik į kelių dvejetų ir tokio pačio penketų skaičiaus sandaugą, o tokia tikrai nėra skaičiaus 13 kartotinis.

Sekantis pagal didumą antrosios eilutės skaičius galėtų būti 2 ir jis galėtų atsirasti antrojoje eilutėje, jeigu pirmojoje eilutėje atsirastų skaičius, prasidedantis 2-u su galimai keliais po jo einančiais nuliais arba atsirastų skaičius, susidedantis iš dviejų vienetų su keliais galimai tarp jų įterptais nuliais. Atvejis 2 su keliais po jo einančiais nuliais taip pat susiveda į tik dvejetų ir penketų sandaugą ir todėl yra neįmanomas. Antrasis atvejis, kai kartotinis yra lygus dviem vienetams su tarp jų įterptiems keliais nuliais būtų įmanomas, jei skaičių 1000.... dalindami iš 13, galėtume gauti tarpinę liekaną lygią 9, tada vietoje eilinio nulio nusikeltume 1, gautume 91 ir viskas pasidalintų.

Praktikoje viskas taip ir įvyksta, tik labai greitai:

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{\quad 91} \\ \quad 91 \\ \underline{\quad 91} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

**Atsakymas.** Pati mažiausia skaičiaus 13 kartotinio skaitmenų suma yra lygi 2.

**10 pavyzdys.** Ar galima visus sveikuosius teigiamus skaičius nuo 1 iki 21 suskirstyti į keletą grupių taip, kad kiekvienoje grupėje pats didžiausias skaičius būtų lygus visų kitų savo grupės skaičių sumai?

**Sprendimas.** Tarkime, kad taip padaryti yra galima. Tada kiekvienos grupės didžiausiųjų skaičių suma yra lygi visų kitų likusių skaičių sumai. Tai reiškia, jog visus skaičius nuo 1 iki 21 galima suskirstyti į dvi dalis su vienoda suma. Bet tas reiškia, kad visų skaičių nuo 1 iki 21 suma yra lyginis skaičius. Tačiau skaičius  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21$ , kuris yra lygus 10-ties lyginių ir 11-os nelyginių skaičių sumai arba kitaip skaičiui  $22 \cdot 10 + 11 = 220 + 11 = 231$  yra akivaizdžiai nelyginis, todėl taip visų skaičių nuo 1 iki 21 taip suskirstyti negalima.

**Atsakymas.** Ne, taip suskirstyti negalima.

**11 pavyzdys.** Į lentelės 3 x 3 langelius po vieną skaičių į kiekvieną langelį yra surašyti visi sveikieji teigiami skaičiai nuo 1 iki 9. Nagrinėsime visas galimas keturių skaičių sumas, kurios gali būti gautos visuose keturiuose galimuose mažesniuose 2 x 2 kvadratuose. Kokia yra pati didžiausia galima mažiausios tokios keturių skaičių sumos 2 x 2 kvadrato reikšmė?

**Sprendimas.** Išnagrinėsime, kokia yra pati didžiausia galima visų galimų keturių 2 x 2 kvadratų sumos reikšmė. Sakykime, kad sveikieji teigiami skaičiai a, b, c, d, e, f, g, h, i yra išdėstyti lentelės 3 x 3 langeliuose:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Matome, kad skaičius e priklauso visiems keturiems mažesniems 2 x 2 kvadratams, o skaičiai b, d, f ir h – dviem 2 x 2 kvadratams, o likę keturi skaičiai a, c, g ir i – vieninteliam 2 x 2 kvadratui. Todėl skaičiuodami visų keturių 2 x 2 kvadratų skaitmenų sumą matome, kad ji bus pati didžiausia, kai vietoje į visus 4 kvadratus įeinančio skaičiaus e imsime 9, vietoje į po du 2 x 2 kvadratus įeinantiems skaičiams b, d, f ir h imsime (nesvarbu kokia eile) 8, 7, 6 ir 5, o likusiose vietose – vėl nesvarbu, kokia eile – imsime skaičius 4, 3, 2 ir 1.

Todėl pati didžiausia visų keturių 2 x 2 kvadratų skaičių suma yra  $4 \cdot 9 + 2(8+7+6+5) + 4+3+2+1 = 36 + 2 \cdot 26 + 10 = 36 + 52 + 10 = 98$ . Todėl galima tikėtis, kad pati didžiausia mažiausiojo 2 x 2 kvadrato skaitmenų suma galėtų būti lygi 24. Ji tikrai negali būti lygi 25, nes tada visuose keturiuose 2 x 2 kvadratuose esanti suma prašoktų 100, o ji yra tik per visus keturis 2 x 2 kvadratus daugiausiai lygo 98.

Pavyzdys

1	7	2
8	9	6
3	5	4

rodo, kad tai yra įmanoma, nes galimų keturių 2 x 2 kvadratų skaitmenų sumos yra 25, 24, 25, 24.

**Atsakymas.** Didžiausioji galima mažiausios sumos reikšmė yra 24.

**12 pavyzdys.** Parašykime kokį nors 4-ženklį skaičių. Po to pirmąjį jo skaitmenį perkeltume į skaičiaus “galą” ir po to tuos abu skaičius sudėkime. Pavyzdžiu galime imti 4-ženklį skaičių 2537, perkėlę 2 į galą gauname 5372 ir sudėję turime  $2537 + 5372 = 7909$ . Deja, pasižiūrėję į sekančius penkių mokinių atliktų tokių pačių veiksmų rezultatus, mes turime pripažinti, jog tik vienas iš jų juos atliko teisingai. Kuris?

(A) 4929 (B) 4587 (C) 7314 (D) 1988 (E) 3572

**Sprendimas.** Jeigu mes tą 4-ženklį, užrašomą naudojant skaitmenis A, B, C ir D pažymėsime ABCD, tai perstatę tūkstančių skaitmenį A į skaičiaus galą gausime 4-ženklį skaičių

BCDA ir juos abu sudėję turėsime dviejų keturženklių skaičių ABCD ir BCDA sumą  $ABCD + BCDA$ . Toji dviejų 4-ženklių skaičių  $ABCD + BCDA$  suma gali būti kitaip užrašyta kaip  $1000A + BCD + 10BCD + A = 11BCD + 1001A$ .

Kadangi skaičius 1001 dalijasi iš 11, tai iš 11 dalijasi ir visa gautoji tų abiejų keturženklių skaičių suma. Tuo tarpu iš tų penkių mokinių atliktų veiksmų rezultatų matome, jog rezultatai A, kuris yra 4929, iš 11 nesidalija. Taip pat iš 11 nesidalija ir rezultatas C, kuris yra 7314, o taip pat ir rezultatai D ir E, kurie yra atitinkamai lygūs 1988 bei 3572. Tuo tarpu rezultatas B iš 11 dalijasi ir gali būti gautas kaip dviejų 4-ženklių skaičių 1326 ir 3261 suma, nes  $1326 + 3261 = 4587$ . Todėl teisingas yra tik atsakymas B, arba 4587, kurį ir renkamės.

**Atsakymas.** B arba 4587.

## KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Kiek sveikųjų teigiamų skaičių N tenkina sekančias 5 sąlygas: i) skaičius N yra lyginis; ii) skaičiaus N dalybos iš 5 liekana yra 1; iii) skaičius N dalijasi iš 7; iv) skaičius N mažesnis už 1000; v) skaičiaus N skaitmenų suma yra 23.

(A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

2. Rankininkų komandoje yra 7 žaidėjai, kurių visų ūgiai yra skirtingi. Prieš varžybas treneris dar kartą išmatavo visų jų ūgį ir paaiškėjo, kad keturių pačių mažiausių rankininkų ūgių vidurkis yra 178 cm, o keturių pačių aukščiausių rankininkų ūgių vidurkis yra 195 cm. Dar paaiškėjo, kad visų 7 sportininkų vidutinis ūgis yra 186 cm. Prieš varžybas jie visi išsirikiavo pagal ūgį pradedant žemiausiuoju ir baigiant aukščiausiuoju. Koks yra viduriniojo rankininko ūgis?

(A) 178 cm      (B) 186 cm      (C) 186,5 cm      (D) 190 cm      (E) 195 cm

3. Šios lentelės pirmoje eilutėje paeiliui surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 10. Antroje eilutėje mes užrašome tuos pačius skaičius tam tikra (galbūt kita) tvarka, o trečioje eilutėje užrašome dviejų skaičių, esančių tame pačiame lentelės stulpelyje, sumą. Kiek yra būdų surašyti skaičius antroje eilutėje taip, kad kiekvienas skaičius trečioje eilutėje būtų lyginis?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(A) 1                      (B) 10                      (C) 120                      (D) 14400                      (E) 3628800

4. Išspręskite lygtį

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0.$$

5. Išspręskite lygtį

$$2(x - 6) = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{x+1})^2}.$$

6. Koks yra pats didžiausias iš eilės einančių sveikųjų teigiamų (natūraliųjų) skaičių skaičius, kad jokio iš jų skaitmenų suma nesidalija be liekanos iš 5?

7. Kai Ona atėjo į kambarį, ten esančių žmonių amžiaus vidurkis padidėjo 4 metais. Kai po to į kambarį įžengė dar ir Barbora, kambaryje jau esančių žmonių amžiaus vidurkis padidėjo dar 3 metais. Dar yra žinoma, kad Ona ir Barbora yra vienodo amžiaus. Kiek žmonių buvo kambaryje prieš įžengiant į jį Onai?

8. Klasės lentoje užrašyti devyni skirtingi sveikieji teigiami (natūralieji) skaičiai. Yra žinoma, kad lygiai du iš jų dalijasi be liekanos iš 2, lygiai trys – iš 3, lygiai penki – iš 5 ir lygiai septyni – iš 7. Tegu  $M$  yra pats didžiausias iš visų lentoje parašytųjų skaičių. Kokią pačią mažiausiąją reikšmę gali įgyti skaičius  $M$ ?

9. Tarkime, kad  $x$  yra realusis skaičius, tenkinantis lygybę  $x^3 + 4x = 8$ . Nustatykite, kam gali būti lygus  $x^7 + 64x^2$ .

10. Pirmoje eilutėje Jonas iš eilės rašo visus skaičius 23 kartotinius, pradėdamas nuo paties pirmojo, tai yra, jis iš eilės rašo skaičius

23, 46, 69, 92, 115, 138, 161, 184, 207, 230, ...

Antroje eilutėje, po jo skaičiais Andrius rašo Jono parašytųjų skaičių skaitmenų sumas, arba skaičius

5, 10, 15, 11, 7, 12, 8, 13, 9, 5, ...

Atėjęs Justinas jų klausia, koks pats mažiausias skaičius gali atsirasti tokiu būdu Andriaus pildomoje eilutėje?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. gegužės 4 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>

LIETUVOS JAUNŪJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA