

**DEVINTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2026 m. kovo 7 d.

Uždavinių sąlygos ir sprendimai

IX klasė

1. Duoti tokie teigiami realieji skaičiai a ir b , kad

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3, \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10.$$

Apskaičiuokite $a^{-1} + b^{-1}$.

Sprendimas. Padauginame duotąsias lygybes iš ab :

$$a^2 + b^2 = 3ab, \quad a^3 + b^3 = 10ab.$$

Kadangi $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)(3ab - ab) = 2ab(a + b)$, tai

$$2ab(a + b) = 10ab \quad (ab \neq 0), \quad a + b = 5,$$

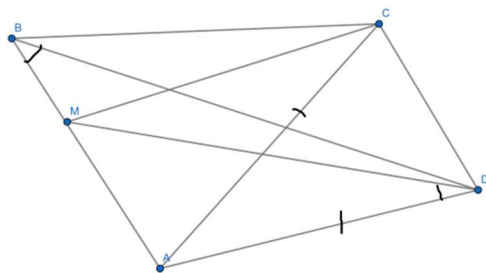
$$25 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 3ab + 2ab = 5ab, \quad ab = 5,$$

$$a^{-1} + b^{-1} = \frac{a + b}{ab} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ats.: 1.

2. Keturkampio $ABCD$ įstrižainė AC lygi kraštinei AD . Kraštinėje AB yra toks taškas M , kad $\angle MDA = \angle ABD$. Įrodykite, kad $\angle ACM = \angle ABC$.

Sprendimas. Trikampiai ABD ir ADM yra panašieji, nes jų kampas A yra bendras, o $\angle ABD = \angle ADM$. Iš jų panašumo išplaukia lygybė $\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AD}$. Kadangi $AD = AC$, tai iš čia gauname, kad $\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AC}$. Kadangi trikampių ACM ir ABC kampai prie viršūnės A yra vienodi, tai iš šios lygybės gauname, kad jie panašieji, todėl $\angle MCA = \angle CBA$, ką ir reikėjo įrodyti.



3. Kiekviename lentelės langelyje įrašytas skaičius 1 arba -1 . Apskaičiavus kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą, visi gautieji skaičiai yra skirtingi. Ar tokia gali būti a) 5×6 lentelė; b) 6×6 lentelė?

Sprendimas. a) atveju pateikiama 5×6 lentelė tenkina visas uždavinio sąlygas

1	1	1	1	1	-1	4
1	1	1	1	-1	-1	2
1	1	1	-1	-1	-1	0
1	1	-1	-1	-1	-1	-2
1	-1	-1	-1	-1	-1	-4
5	3	1	-1	-3	-5	Sumos

b) Pastebėkime, kad mažiausia suma, kurią gali įgyti suma 6×6 lentelės eilutėse arba stulpeliuose yra lygi -6 , o didžiausia yra lygi 6. Be to, kiekviena tokia suma gali būti tik lyginis skaičius, nes tai yra šešių nelyginių skaičių suma. Tačiau tarp skaičių nuo -6 iki 6 egzistuoja tik 7 lyginiai skaičiai (tai $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$). O eilučių ir stulpelių skaičius 6×6 lentelėje yra 12. Todėl esant bet kuriam 6×6 lentelės užpildymui skaičiais -1 ir 1 tarp jos eilučių ir stulpelių rasis tokios, kurių skaičių sumos bus tokios pačios.

Ats.: a) gali; b) negali.

4. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $1, 2, 3, \dots, 4n$ galima suskirstyti į n ketvertų, kad kiekviename ketverte vienas skaičius būtų lygus likusių trijų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Sprendimas. Pastebėkime, kad jei iš keturių natūraliųjų skaičių vienas yra lygus likusių keturių skaičių aritmetiniam vidurkiui, tai tų keturių skaičių suma dalijasi iš 4, nes iš lygybės $a = \frac{b+c+d}{3}$ seka lygybė $a + b + c + d = 4a$. Taigi, visų skaičių suma turi dalintis iš 4. Kadangi $1 + 2 + 3 + \dots + 4n = \frac{1+4n}{2} \cdot 4n = 2n(1 + 4n)$, tai taip bus tik su lyginiais n . Parodysime, kad su kiekvienu lyginiu $n = 2m$ galima skaičius suskirstyti į grupes taip, kaip sakoma uždavinio sąlygoje. Išnagrinėkime grupes $A_k = \{8k + 1, 8k + 3, 8k + 8, 8k + 4\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ ir $B_k = \{8k + 6, 8k + 7, 8k + 2, 8k + 5\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$. Paskutiniai iš šių grupių skaičių yra likusių grupės skaičių aritmetiniai vidurkiai. Tuomet skaičių rinkiniai $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$ yra ieškomasis suskirstymas.

Ats.: su bet kuriuo lyginiu n .

X klasė

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z) , tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 33, \\ x + 3y + 5z = 34. \end{cases}$$

Sprendimas. Jeigu antrąją sistemos lygtį padaugtume iš 2 ir atimtume iš pirmosios lygties, tai gautume

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 - 10z = -35.$$

Ją perrašome taip:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = 0,$$
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0.$$

Realųjų skaičių kvadratų suma yra lygi nuliui tik kai kiekvienas dėmuo yra lygus nuliui, todėl vienintelis įmanomas sprendinys yra $(x, y, z) = (1, 3, 5)$. Tačiau tada

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 \neq 33,$$

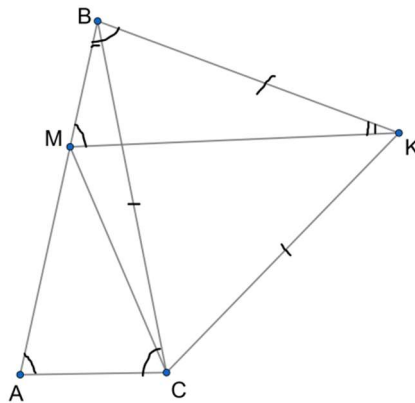
todėl duotoji lygčių sistema sprendinių neturi.

Ats.: sistema sprendinių neturi.

2. Trikampis ABC lygiašonis, $AB = BC$, kampas prie viršūnės B lygus 20° . Kraštinėje AB yra toks taškas M , kad $BM = AC$. Raskite kampą AMC .

Sprendimas. Trikampio ABC išorėje randame tokį tašką K , kad trikampis KBC būtų lygiakraštis. Iš čia $\angle MBK = \angle ABK = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \angle BAC = \angle ACB$. Kadangi $KB = AB$, $MB = AC$, $\angle MBK = \angle ACB$, tai trikampiai KBM ir BAC yra lygūs, taigi $KM = BC = KA = KC$, $\angle KMB = \angle ACB = 80^\circ$, $\angle BKM = \angle ABC = 20^\circ$. Iš čia seka, kad $\angle MKC = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, o kadangi $MK = KC$, tai $\angle KMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MKC) = 70^\circ$. Taigi $\angle CMB = 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ$, todėl $\angle AMC = 180^\circ - \angle BMC = 30^\circ$.

Ats.: 30° .



3. Yra 9 užklijuotos dėžutės, kurių pirmoje yra 1 rutuliukas, antroje – 2 rutuliukai ir t. t., devintoje dėžutėje yra 9 rutuliukai. Ant kiekvienos dėžutės yra užrašyta, kiek joje yra rutuliukų. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pradeda A. Kiekvienas savo ėjimu arba paima vieną rutuliuką iš bet kurios praplėštos dėžutės, arba praplėšia bet kurią užklijuotą dėžutę ir iš jos paima vieną rutuliuką. Pralaimi tas, kuris praplėšia paskutinę dėžutę. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.

Sprendimas. Pergalės strategiją turi B. Jis turi pradžioje praplėšti dėžutes su 2, 4, 6, 8 rutuliukais. Tam jam prireiks 4 ėjimų (ar mažiau, jei kurią nors iš šių dėžučių praplėš A), taigi jis nepraplėš paskutinės dėžutės. Po to kad ir kaip bežaidžiant A ir B, paskutinė praplėšta dėžutė bus nelyginė. Kadangi iš viso yra 45 rutuliukai, tai prieš praplėšiant paskutinę dėžutę, bus paimta lyginis skaičius rutuliukų. Taigi paskutinę dėžutę praplėš A, o B laimės.

Ats.: pergalės strategiją turi B.

4. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $1, 2, 3, \dots, 4n$ galima suskirstyti į n ketvertų, kad kiekviename ketverte vienas skaičius būtų lygus likusių trijų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Sprendimas. Žr. 9 klasės 4 uždavinio sprendimą.

XI–XII klasės

1. Įrodykite, kad visiems realiesiems x, y, z iš intervalo $[0; 1]$ teisinga nelygybė

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \frac{1}{3}.$$

Sprendimas. Akivaizdu, kad

$$\begin{aligned} \frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+x^3+z^3} + \frac{z}{7+y^3+x^3} \\ \leq \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{y}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} \\ = \frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}. \end{aligned}$$

Nesunkiai įsitikiname, kad yra teisinga nelygybė $3x \leq 2 + x^3$ – tai seka iš to, kad $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$. Analogiškai turime nelygybes $3y \leq 2 + y^3$ ir $3z \leq 2 + z^3$. Sudėję šias nelygybes, gauname, kad $3(x+y+z) \leq 6 + x^3 + y^3 + z^3$, taigi $\frac{3(x+y+z)}{6+x^3+y^3+z^3} \leq 1$. Iš čia

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+x^3+z^3} + \frac{z}{7+y^3+x^3} \leq \frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3} \leq \frac{1}{3}.$$

2. Trikampis ABC lygiašonis, $AB = BC$, kampas prie viršūnės B lygus 20° . Kraštinėje AB yra toks taškas M , kad $BM = AC$. Raskite kampą AMC .

Sprendimas. Žr. 10 klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Yra 9 užklijuotos dėžutės, kurių pirmoje yra 1 rutuliukas, antroje – 2 rutuliukai ir t. t., devintoje dėžutėje yra 9 rutuliukai. Ant kiekvienos dėžutės yra užrašyta, kiek joje yra rutuliukų. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pradėdamas A. Kiekvienas savo ėjimu arba paima vieną rutuliuką iš bet kurios praplėstos dėžutės, arba praplėšia bet kurią užklijuotą dėžutę ir iš jos paima vieną rutuliuką. Pralaimi tas, kuris praplėšia paskutinę dėžutę. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergaltės strategiją, ir nurodykite ją.

Sprendimas. Žr. 10 klasės 3 uždavinio sprendimą.

4. Duoti sveikieji skaičiai a, b, c, D , kuriems $a + b + c = 0$, o skaičius

$$D - a^3b - b^3c - c^3a$$

yra sveikąjo skaičiaus kvadratas. Nustatykite, kurios iš šių D reikšmių yra galimos: a) 79; b) 2026; c) 2027 (skaičiai 79 ir 2027 yra pirminiai).

Sprendimas. Pažymėkime $k^2 = D - a^3b - b^3c - c^3a$, čia $k \geq 0$. Pastebėkime, kad

$$k^2 - D = -a^3b - b^3c - c^3a = -a^3b + b^3(a + b) + (a + b)^3a = (a^2 + ab + b^2)^2.$$

Taigi $D = (k - a^2 - ab - b^2)(k + a^2 + ab + b^2)$. Čia $a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{4}((2a + b)^2 + 3b^2) \geq 0$, todėl $k + a^2 + ab + b^2 \geq 0$. Jei $D > 0$, tai abu skaičiai $k \pm (a^2 + ab + b^2)$ teigiami, o čia pasirinkę minusą, gausime mažesnįjį iš jų. Šie du skaičiai to paties lyginumo, todėl jų sandauga D yra arba nelyginė, arba dali iš 4. Vadinasi, $D \neq 2026$.

Jei skaičius D pirminis, tai

$$k + a^2 + ab + b^2 = D, \quad k - a^2 - ab - b^2 = 1.$$

Tada $a^2 + ab + b^2 = \frac{D-1}{2}$. Jei $D = 2027$, tai $(2a + b)^2 + 3b^2 = 4(a^2 + ab + b^2) = 4 \cdot 1013$ dalijasi iš 3 su liekana 2. Tačiau sveikojo skaičiaus kvadratas $(2a + b)^2$ dalijasi iš 3 su liekana 0 arba 1. Vadinasi, $D \neq 2027$. Kai $D = 79$, lygtis $a^2 + ab + b^2 = 39$ turi sprendinį $(a, b) = (2, 5)$, kuris kartu su $c = -a - b = -7$ ir $k = 1 + a^2 + ab + b^2 = 40$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: tik 79.