

Jaunajam
matematikui

27

2024–2026 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

- A. Apynis, E. Mazėtis.** STOJAMOJI UŽDUOTIS (2, 41–42 psl.)
- I. K. Pulmonas.** TEKSTINIAI IR NE TIK... UŽDAVINIAI SU PARAMETRAIS (3–8, 43–48 psl.)
- II. A. Novikas.** PIRMINIAI IR SUDĖTINIAI SKAIČIAI (9–14, 49–51 psl.)
- III. A. Apynis.** LYGTYS IR NELYGYBĖS SU PARAMETRAIS (15–17, 52–56 psl.)
- IV. E. Mazėtis.** DAR KARTĄ APIE TRIKAMPĮ (18–23, 57–60 psl.)
- V. A. Apynis.** SKAIČIAUS MODULIS (24–26, 61–64 psl.)
- VI. R. Kašuba.** SVĖRIMAI IR PILSTYMAI (27–31, 65–68 psl.)
- VII. A. Apynis.** PROGRESIJOS (32–34, 69–72 psl.)
- VIII. E. Mazėtis.** ČEVOS IR MENELAJO TEOREMOS (35–39, 73–76 psl.)
- E. Mazėtis.** BAIGIAMOJI UŽDUOTIS (40, 77 psl.)

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Baseine yra du vamzdžiai. Per vieną vamzdį vanduo įteka į baseiną, o per kitą – išteka iš jo. Atidarius vien pirmąjį vamzdį, tuščias baseinas pripildomas 2 valandom ilgiau, negu vanduo iš pilno baseino išteka, atidarius vien antrąjį vamzdį. Kai buvo pripildyta trečdalis baseino, buvo atidaryti abu vamzdžiai ir per 8 valandas iš baseino ištekėjo visas vanduo. Per kiek laiko pirmuoju vamzdžiu tuščias baseinas pripildomas, o antruoju vamzdžiu pilnas baseinas ištuštinamas?

2. Išspręskite lygtį

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5.$$

3. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5 \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x} \right).$$

4. Išspręskite nelygybę

$$\frac{1}{4x^2} > \frac{1}{(x-1)^2}.$$

5. Raskite nelygybės

$$x^2 + 2x - 24 < 0$$

sprendinių, kuriems galioja nelygybė $\sqrt{2-5x} < 7$, aibę.

6. Natūraliojo skaičiaus n faktorialu yra vadinama sandauga $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Raskite natūralųjį skaičių x , kuriam galioja lygybė

$$\frac{x!}{6!} = 7!.$$

7. Įrodykite, kad skaičius $n^3 + 11n$ dalijasi iš 6, kai $n \in \mathbb{N}$.

8. Nustatykite, kurioms parametro a reikšmėms (čia $a \neq 0$) parabolės $y = ax^2$ ir $y = (x-2)^2$ susikerta dviejuose taškuose.

9. Trikampyje MOP turime $\angle OMP = 10^\circ$, $\angle MPO = 60^\circ$, $OP = 8$. Taškas K yra kraštinėje MP , o $\angle MOK = 50^\circ$. Raskite trikampio OKP perimetrą.

10. Trapecijos, apie kurią galima apibrėžti apskritimą, vidurinės linijos ilgis lygus 5. Ji dalija trapeciją į dvi dalis, kurių plotų santykis yra $7 : 13$. Raskite trapecijos aukštinės ilgį.

I. TEKSTINIAI IR NE TIK... UŽDAVINIAI SU PARAMETRAIS

Teorinę medžiagą parengė ir pirmąją užduotį sudarė mokytojas-ekspertas Kazimieras Pulmonas

Įprasta, kad daugiausia sprendžiamieji įvairiausius tekstinius uždavinius su konkrečiomis skaitinių duomenų reikšmėmis. Tačiau pasitaiko jų su parametrais. Parametrai tai paprastai raidiniai koeficientai, turintys pastovią reikšmę kiekvienu konkrečiu atveju uždavinyje. Sprendžiant, o ir išsprendus problemą ir suradus sprendinius, reikia savikritiškai įvertinti juos, tyrinėti, kritiškai mąstyti. Būtinai matematinis samprotavimas įvertinant surastų sprendinių reikšmę.

Kadangi daugeliu atvejų susiduriama ir su kvadratinių lygčių sprendimu, tenka pasitelkti sprendinių egzistavimo sąlygą ($D > 0$), Vijeto teoremą.

1 pavyzdys. Už prekių iškrovimą darbininkams sumokėta a Eur. Kadangi į darbą atėjo 3 darbininkais mažiau, tai kiekvienas atvykęs gavo 3 Eur daugiau negu buvo numatyta. Kiek darbininkų krovė prekes?

Sprendimas. Sakykime, kad krovė n darbininkų ($n \in N$), o buvo pasamdyta $(n + 3)$ darbininkai.

Kiekvienas darbininkas uždirbo $\frac{a}{n}$ Eur, o būtų uždirbęs $\frac{a}{n+3}$ Eur.

Pagal sąlygą:

$$\frac{a}{n} - \frac{a}{n+3} = 3; \frac{an+3a-an}{n^2+3n} = 3; 3a = 3(n^2 + 3n).$$

Turime lygtį $n^2 + 3n - a = 0$. Kadangi $D = 3^2 - 4 \cdot (-a) = 9 + 4a > 0$, o $n_1 \cdot n_2 = -a$, tai lygtis turi du skirtingų ženklų sprendinius. Teigiamas sprendinys yra $\frac{-3 + \sqrt{9 + 4a}}{2}$.

Ats.: Prekes krovė $\frac{-3 + \sqrt{9 + 4a}}{2}$ darbininkų, $a = n^2 + 3n$, $n \in N$.

2 pavyzdys. Dviračiams pirkti sporto klubas paskyrė n Eur, tačiau paaiškėjo, kad kiekvienas dviratis kainuoja a Eur mažiau, todėl nupirkta b dviračių daugiau negu buvo numatyta. Kiek dviračių nupirkta?

Sprendimas. Tarkime, kad buvo planuota nupirkti x dviračių, o nupirkta $(x + b)$ dviračių.

Planuota vieno dviračio kaina $\frac{n}{x}$ Eur, o dviratis nupirktas už $\frac{n}{x+b}$ Eur. Pagal sąlygą:

$$\frac{n}{x} - \frac{n}{x+b} = a, \frac{nx + nb - nx}{x(x+b)} = a, ax^2 + abx - nb = 0.$$

Kadangi $D = (ab)^2 - 4 \cdot a \cdot (-nb) = a^2b^2 + 4abn > 0$, o $x_1 \cdot x_2 = -nb < 0$, tai lygties sprendiniai (dviračių skaičius) yra skirtingų ženklų. Todėl $x = \frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4abn}}{2a}$. Vadinasi, buvo planuota

nupirkti $\frac{-ab + \sqrt{ab(ab + 4n)}}{2a}$, o nupirkta $\frac{-ab + \sqrt{ab(ab + 4b)}}{2a} + b = \frac{ab + \sqrt{ab(ab + 4n)}}{2a}$ dviračių.

Ats.: Nupirkta $\frac{ab + \sqrt{ab(ab + 4n)}}{2a}$ dviračių; $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$.

3 pavyzdys. Atstumas tarp gyvenviečių A ir B lygus s km. Iš A į B tuo pačiu metu tuo pačiu keliu išvažiavo du turistai, kurie turėjo pasiekti gyvenvietę B tam tikru metu. Iš tikrųjų pirmas turistas atvyko į B n h anksčiau, o antras $3n$ h pavėlavo, nes kas valandą nuvažiuodavo vidutiniškai r km mažiau negu pirmas turistas. Nustatykite kiekvieno turisto vidutinį greitį.

Sprendimas. Tegul II turisto greitis $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o I turisto greitis $(v+r) \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Iš gyvenvietės A į B

pirmas turistas judėjo $\frac{s}{v+r}$ h, o antras – $\frac{s}{v}$ h.

Pagal sąlygą:

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{v+r} = 4n,$$

$$\frac{sv + sr - sv}{v^2 + rv} = 4n.$$

Turime $4nv^2 + 4nrv - sr = 0$.

$$D = (4nr)^2 - 4 \cdot 4n \cdot (-sr) = 16n^2 r^2 + 16nsr = 16nr(nr + s).$$

Kadangi $n > 0$, $r > 0$, $s > 0$, tai $D > 0$ ir lygtis turi du sprendinius. Akivaizdu, kad jie skirtingų ženklų, nes $v_1 \cdot v_2 < -\frac{5r}{4n}$.

Todėl antro turisto vidutinis greitis

$$\frac{-4nr + \sqrt{16nr(nr + s)}}{2 \cdot 4n} = \frac{\sqrt{nr(nr + s)} - nr}{2n} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right).$$

Pirmo turisto vidutinis greitis

$$\frac{\sqrt{nr(nr + s)} - nr}{2n} + r = \frac{\sqrt{nr(nr + s)} - nr + 2nr}{2n} = \frac{\sqrt{nr(nr + s)} + nr}{2n} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right).$$

Ats.: $\frac{\sqrt{nr(nr + s)} - nr}{2n} \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\frac{\sqrt{nr(nr + s)} + nr}{2n} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $n > 0$, $r > 0$, $s > 0$.

4 pavyzdys. Apskritimu, kurio ilgis yra s metrų, tuo pačiu metu iš tos pačios vietos pajuda du kūnai. Judėdami ta pačia kryptimi jie prasilenkia kas 25 sekundes, o judėdami priešingomis kryptimis susitinka kas 5 sekundes. Koks yra kiekvieno kūno judėjimo greitis?

Sprendimas. Tarkime, kad vieno apskritimu judančio kūno greitis yra $x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($x > 0$), o kito $y \frac{\text{m}}{\text{s}}$

($y > 0$). Kūnams judant vienas priešais kitą jų priartėjimo greitis yra $(x + y)$ ir lygus $\frac{s}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, o judant

ta pačia kryptimi priartėjimo (aplenkimo) greitis yra $(x - y)$ ir lygus $\frac{s}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ($x > y$).

Sudarome lygčių sistemą:
$$\begin{cases} x + y = \frac{s}{5}, \\ x - y = \frac{s}{25}. \end{cases}$$

Turime $2x = \frac{s}{5} + \frac{s}{25} = \frac{6s}{25}$, $x = \frac{3s}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, o $2y = \frac{s}{5} - \frac{s}{25} = \frac{4s}{25}$, $y = \frac{2s}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ats.: $\frac{2s}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{3s}{25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

5 pavyzdys. Nupirkta keletas kilogramų dviejų rūšių prekių: pirmos rūšies už 45 Eur ir antros rūšies už 20 Eur, be to, pirmos rūšies prekių 1 kg daugiau. 1 kg pirmos rūšies prekių kainuoja a Eur brangiau negu 1 kg antros rūšies prekių. Kiek kiekvienos rūšies prekių nupirkta? Raskite sprendinių skaičių, priklausomai nuo galimų a reikšmių.

Sprendimas. Sakykime, nupirkta n kg antros rūšies prekių, o pirmos rūšies $(n+1)$ kg.

Pirmos rūšies prekių kilogramo kaina yra $\frac{45}{n+1}$ Eur, o antros rūšies $\frac{20}{n}$ Eur.

Pagal sąlygą:

$$\frac{45}{n+1} - \frac{20}{n} = a \quad (a > 0),$$

$$45n - 20n - 20 = an^2 + an,$$

$$an^2 + (a - 25)n + 20 = 0.$$

$$D = (a - 25)^2 - 4 \cdot a \cdot 20 = a^2 - 50a + 625 - 80a = a^2 - 130a + 625.$$

Reiškinio $a^2 - 130a + 625 > 0$ reikšmės yra teigiamos, kai $a \in (0; 5)$, o tai reiškia, kad lygtis turi du sprendinius.

Išsamiau patyrinėkime lygtį $an^2 + (a - 25)n + 20 = 0$:

$$n^2 + \frac{a-25}{a}n + \frac{20}{a} = 0, \quad a \in (0; 5).$$

Kadangi $n_1 \cdot n_2 = \frac{20}{a} > 0$, o $n_1 + n_2 = \frac{25-a}{a} > 0$, tai abu sprendiniai yra teigiami.

Vadinasi, II rūšies prekių nupirkta $\frac{25-a \pm \sqrt{a^2 - 130a + 625}}{2a}$ kg, o I rūšies prekių

$$\left(\frac{25-a \pm \sqrt{a^2 + 130a + 625}}{2a} + 1 \right) \text{ kg} = \frac{25+a \pm \sqrt{a^2 + 130a + 625}}{2a} \text{ kg}.$$

Kai $a = 5$, tai kvadratinė lygtis $an^2 + (a - 25)n + 20 = 0$ tampa $5n^2 - 20n + 20 = 0$ ir $n^2 - 4n + 4 = 0$, $(n-2)^2 = 0$, $n = 2$ (lygtis turi vieną sprendinį).

II rūšies prekių nupirkta 2 kg, o I rūšies prekių $2+1+3$ (kg).

Kai $a > 5$, tai $D < 0$ ir kvadratinė lygtis sprendinių neturi.

Ats.: Kai $a \in (0; 5)$, tai du sprendiniai: II rūšies prekių $\frac{25-a \pm \sqrt{a^2 + 130a + 625}}{2a}$ kg, o I rūšies

prekių $\frac{25+a \pm \sqrt{a^2 + 130a + 625}}{2a}$ kg;

kai $a = 5$, tai vienas sprendinys: II rūšies prekių 2 kg, o I rūšies 3 kg;

kai $a > 5$, sprendinių nėra.

6 pavyzdys. Su kuria k reikšme lygties $x^2 - 2x + k = 0$ sprendinių skirtumo kvadratas lygus 16?

Sprendimas. I būdas.

Lygties $x^2 - 2x + k = 0$ sprendiniai yra $x_1 = 1 - \sqrt{1-k}$ ir $x_2 = 1 + \sqrt{1-k}$.

Pagal sąlygą $(1 + \sqrt{1-k} - 1 + \sqrt{1-k})^2 = 16$, $(2\sqrt{1-k})^2 = 16$, $(\sqrt{1-k})^2 = 4$, $1-k = 4$, $k = -3$.

II būdas.

Remiamės Vijeto teorema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = k; \end{cases}$ taigi $(x_1 + x_2)^2 = 4$,

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2) - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 4 - 4 \cdot k.$$

Iš sąlygos $4 - 4k = 16$, tuomet $k = -3$.

Ats.: $k = -3$.

7 pavyzdys. (Viena iš 1993 metų Latvijos brandos egzamino užduočių, paimta iš Algirdo Zabulionio knygelės „Matematikos brandos egzaminai“.)

Duota lygtis $(a - 2)x + 2ax + 2a - 3 = 0$.

a) Su kuriomis parametro a reikšmėmis ši lygtis turi du skirtingus sprendinius?

b) Su kuriomis parametro a reikšmėmis abu sprendiniai yra teigiami?

Sprendimas. a) Kvadratinė lygtis turi skirtingus sprendinius kai $a \neq 2$ ir $D > 0$

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot (a - 2)(2a - 3) = 4a^2 - 4(2a^2 - 4a - 3a + 6) = 4(a^2 - 2a^2 + 7a - 6) = \\ = 4(-a^2 + 7a - 6) = -4a^2 + 28a - 24.$$

Sprendžiame kvadratinę nelygybę

$$-4a^2 + 28a - 24 > 0 \quad | :(-4)$$

$$a^2 - 7a + 6 < 0.$$



Kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $a \in (1; 2) \cup (2; 6)$.

b) Turime duotą redukuotą kvadratinę lygtį:

$$x^2 + \frac{2a}{a-2}x + \frac{2a-3}{a-2} = 0.$$

Abu sprendiniai yra teigiami, kai tenkinama sąlyga:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2a-3}{a-2} > 0, \text{ o } x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2} < 0.$$

Sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{2a}{a-2} < 0, \\ \frac{2a-3}{a-2} > 0; \end{cases}$$

atsižvelgę į a) užduoties reikalavimą.

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ a-2 < 0 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} 2a < 0, \\ a-2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < 2 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} a < 0, \\ a > 2; \end{cases}$$

$$1 < a < 2$$

$$\frac{2a-3}{a-2} > 0,$$

$$\begin{cases} 2a-3 > 0, \\ a-2 > 0; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} 2a-3 < 0, \\ a-2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 1,5, \\ a > 2; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} a < 1,5, \\ a < 2; \end{cases}$$

$$a > 2, \quad 1 < a < 1,5.$$

Abu sprendiniai teigiami, kai $a \in (1; 1,5)$.

Ats.: a) Lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $a \in (1; 2) \cup (2; 6)$.

b) Abu lygties sprendiniai teigiami, kai $a \in (1; 1,5)$.

8 pavyzdys. Raskite lygties $a^2 + \frac{a-1}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$ sprendinius su visomis leistinomis parametro

a reikšmėmis.

Sprendimas. $a^2 + \frac{a^2-1}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \quad | \cdot x(x-2) \quad x \neq 0, x \neq 2.$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - 1 = x^2 + 2x;$$

$$a^2x^2 - x^2 - 2a^2 - 2x + a^2 - 1 = 0;$$

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(a^2 + 1)x + a^2 - 1 = 0; \quad a \neq \pm 1.$$

Lygties diskriminantas

$$D = (2(a^2 + 1))^2 - 4 \cdot (a^2 - 1)(a^2 - 1) = 4(a^4 + 2a^2 + 1) - 4(a^4 - 2a^2 + 1) = 4(a^4 + 2a^2 + 1 - a^4 + 2a^2 - 1) = 4 \cdot 4a^2 = 16a^2.$$

$$x_{1;2} = \frac{2(a^2 + 1) \pm 4a}{2(a^2 - 1)} = \frac{(a^2 + 1) \pm 2a}{a^2 - 1};$$

$$x_1 = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1};$$

$$x_2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Panagrinėkime surastas x reikšmes:

$$\frac{a-1}{a+1} \neq 0 \Rightarrow a \neq -1; \quad \frac{a-1}{a+1} \neq 2; \quad a-1 \neq 2a+2 \Rightarrow a \neq -3.$$

$$\frac{a+1}{a-1} \neq 0 \Rightarrow a \neq -1; \quad \frac{a+1}{a-1} \neq 2; \quad a+1 \neq 2a-2 \Rightarrow a \neq 3.$$

Kai $a = \pm 1$, lygtis sprendinių neturi.

Kai $a = \pm 3$, tai $8x^2 - 10x + 8 = 0; \quad 4x^2 - 5x + 4 = 0; \quad x = \begin{cases} 0,5, \\ 2 \text{ (netinka)}. \end{cases}$

Ats.: Kai $a \neq \pm 1$ ir $a \neq \pm 3$, tai $x = \frac{a+1}{a-1}, \quad x = \frac{a-1}{a+1}$ (du sprendiniai);

kai $a = \pm 1$, lygtis sprendinių neturi;

kai $a = \pm 3$, tai $x = 0,5$ (vienas sprendinys).

9 pavyzdys. Kokia turi būti a reikšmė, kad lygties $\frac{x^2}{a} - x + a - 1 = 0$ sprendinių sandauga būtų mažiausia?

Sprendimas. $\frac{x^2}{a} - x + a - 1 = 0 \quad | \cdot a,$

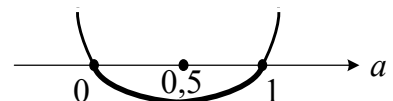
$$x^2 - ax + a^2 - a = 0;$$

I būdas

Pagal Vijeto teoremą $x_1 \cdot x_2 = a^2 - a.$

Kvadratinis reiškiny $a^2 - a$ įgyja nulines reikšmes, kai $a = 0$ ir $a = 1.$

Akivaizdu, kad reiškiny $a^2 - a$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $a = 0,5.$



II būdas

Pasitelkę diferencialinio skaičiavimo žinias, su kuriomis susipažinsite baigiamojoje klasėje, reiškini $a^2 - a$ galime tyrinėti taikant išvestines:

$$f'(a) = (a^2 - a)' = 2a - 1; \quad 2a - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ats.: $a = 0,5$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Keleivinio ir prekinio traukinio greičių santykis lygus $a:b$. Keleivinis traukinys išvyko iš stoties A 0,5 h vėliau negu prekinis, o atvažiavo į stotį B 0,5 h anksčiau. Atstumas tarp stočių A ir B lygus 5 km. Apskaičiuokite kiekvieno traukinio greitį.
2. Stačiakampės sporto aikštelės ilgis b m didesnis už plotį. Palei aikštelės kraštus eina vienodo pločio a m takas. Sporto aikštelės plotas lygus to tako plotui. Kokie yra aikštelės matmenys?
3. Trys darbininkai kartu pradeda atlikti tam tikras vienodas užduotis. A darbininkas užduotį atlieka a dienų vėliau negu B darbininkas ir b dienų vėliau negu C darbininkas. Dirbdami drauge, A ir B numatytą darbą atlieka per tiek pat dienų, kaip ir C . Per kiek laiko šią užduotį įvykdytų kiekvienas darbininkas atskirai? Kaip turi būti susiję nurodyti dydžiai, kad uždavinys turėtų sprendinį?
4. Vienas turistas nuėjo 18 km, o kitas – 32 km. Pirmasis kelyje užtruko 1 h mažiau negu antrasis ir ėjo a km/h mažesniu greičiu. Raskite abiejų turistų greičius. Kaip priklauso sprendinių skaičius nuo a reikšmių ($a > 0$)?
5. Du sportininkai bėga stadiono taku. Kiekvieno jų greitis pastovus, tačiau pirmasis stadiono ratą nubėga a s greičiau negu antrasis. Pradėję bėgti ta pačia kryptimi iš vienos vietos, sportininkai susilygina kas b s. Po kiek laiko jie susitiktų, jeigu tais pačiais greičiais ir tuo pačiu taku bėgtų priešingomis kryptimis.
6. Iš vietovės A upe prieš srovę išplaukė motorinė valtis, o iš vietovės B tuo pačiu metu pasroviui plaustas. Po a h jie susitiko ir toliau plaukė nesustodami. Pasiekusi vietovę B valtis tuoj pat grįžo ir vietovėje A pasivijo plaustą. Motorinės valtys savasis greitis visą laiką buvo pastovus. Kiek laiko plaukė plaustas ir kiek – valtis?
7. Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ turi du skirtingus neigiamus sprendinius?
8. Raskite sveikąją a reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ sprendinių suma lygi tų sprendinių kvadratų sumai?

Raskite lygčių sprendinius su visomis leistinomis parametro reikšmėmis:

9. $a^2(x+1) - 2a(x+3) - 3(x-3) = 0$.

10. $\frac{1}{a(2+x)} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{2a+6}{x^3 - 4x}$.

II. PIRMINIAI IR SUDĖTINIAI SKAIČIAI

Teorinę medžiagą parengė bei antrąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Aivaras Novikas

Skaičių dalumas. Visų sveikųjų skaičių aibėje $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ atlikdami sudėties ir daugybos veiksmus, liksime joje: bet kurių dviejų skaičių suma ir sandauga vėl yra sveikieji skaičiai. Šiems veiksams priešingi yra atimties ir dalybos veiksmas: atimties $a - b$ rezultatas (skirtumas) yra toks vienintelis x , kuriam $a = b + x$, o dalybos $a : b$ rezultatas (dalmuo) yra toks vienintelis x , kuriam $a = b \cdot x$ (dalmuo neapibrėžtas, kai $b = 0$). Bet kurių sveikųjų skaičių skirtumas vėl yra sveikasis skaičius. Šiuo požiūriu dalyba yra įdomiausia: sveikųjų skaičių a ir $b \neq 0$ dalmuo $a : b$ tik kartais yra sveikasis skaičius. Kai taip visgi nutinka, t. y. kai lygties $a = b \cdot x$ sprendinys x yra sveikasis (čia $b \neq 0$), tai sakoma, kad a **dalijasi iš** b . Ėmus tirti šį dalumo sąryšį tarp sveikųjų skaičių bei visa, kas su juo susiję, pamažu radosi viena iš didžiųjų matematikos sričių, vadinama **skaičių teorija**.

Jei a dalijasi iš b , tai (sveikasis) skaičius b vadinamas (sveikojo) skaičiaus a **dalikliu**, o skaičius $a - b$ skaičiaus b **kartotiniu**. Jei apie bet kokį sveikąjį $b \neq 0$ paklausime, kokie yra jo kartotiniai a , tai atsakymas nebus sudėtingas: tai skaičiai $a = b \cdot x$, kur x yra bet koks sveikasis skaičius. Dviejų tokių kartotinių suma ir skirtumas vėl yra b kartotiniai: $bx_1 \pm bx_2 = b(x_1 \pm x_2)$. Padauginus b kartotinį $b \cdot x$ iš bet kokio sveikojo c , vėl gaunamas b kartotinis $b \cdot (cx)$. Jei turime skaičiaus b kartotinį $a = b \cdot x$, kur b savo ruožtu yra sveikojo skaičiaus c kartotinis $b = c \cdot y$, tai $a = c \cdot (xy)$, taigi a yra c kartotinis. Pagrindėme tokias **išvadas** apie sveikuosius skaičius:

- 1) jei a_1 ir a_2 dalijasi iš $b (\neq 0)$, tai ir $a_1 \pm a_2$ dalijasi iš b ;
- 2) jei a dalijasi iš $b (\neq 0)$, tai ac dalijasi iš b su kiekvienu sveikuoju c ;
- 3) jei a dalijasi iš $b (\neq 0)$, o b dalijasi iš $c (\neq 0)$, tai a dalijasi iš c .

Tiriant skaičių dalumą, šiomis išvadamis paprastai remiamasi nejučia. Pavyzdžiui, pastebėję, jog $n = 11\,768\,100$ dalijasi iš 3 (pagal skaitmenų sumą), neskaiciuodami sumos $s = n + 3 \cdot 2^{100}$ ar sandaugos $p = n \cdot 95$ suvokiame, kad s ir p dalijasi iš 3, o kadangi n dalijasi iš 100, tai n dalijasi ir iš 4, iš 25 bei iš 50 (iš bet kurio skaičiaus 100 daliklio).

Tarkime, kad skaičius b natūralusis (t. y. teigiamas sveikasis). Visi jo teigiami kartotiniai $b \cdot x$ sudaro didėjančią seką $b, 2b, 3b, \dots$. Kai $b = 2$, tai šią seką gausime, visų natūraliųjų skaičių sekoje 1, 2, 3, ... imdami kas antrą skaičių; kai $b = 3$, tai kas trečią; ir t. t. Jei natūralusis a yra sekoje $b, 2b, 3b, \dots$, tai $a = bx$ yra b kartotinis bei dalijasi iš b . Tuo tarpu kai natūralusis a iš b nesidalija, jis yra tarp dviejų gretimų b kartotinių bx ir $b(x + 1)$ (jei $a < b$, tai $x = 0$). Abiem atvejais įmanoma a dalyba iš b **su liekana**: atitinkamas x yra šios dalybos dalmuo, o skaičius $r = a - bx$, parodantis, kiek a yra didesnis už b kartotinį bx , yra šios dalybos liekana. Čia $0 \leq r < b$. Pavyzdžiui, skaičius $a = 325$ yra tarp skaičiaus $b = 7$ gretimų kartotinių $7 \cdot 46$ ir $7 \cdot 47$, tad dalijant a iš b su liekana gaunami dalmuo $x = 46$ ir liekana $r = 325 - 7x = 3$. O jei $a = 322 = 7 \cdot 46$, tai gauname $x = 46$ ir $r = 322 - 7x = 0$.

Visi natūraliojo skaičiaus b teigiami kartotiniai $b, 2b, 3b, \dots$ yra ne mažesni už b . Taigi kiekvieno natūraliojo skaičiaus a visi teigiami dalikliai yra atitinkamai ne didesni už a , t. y. priklauso aibei $\{1, 2, 3, \dots, a\}$. Lygybė $a = 1 \cdot a$ parodo, kad mažiausias ir didžiausias šios aibės skaičiai visada yra a dalikliai. Jau matėme, kad natūraliojo b teigiamų kartotinių aibė lengvai nusakoma. Tačiau jei iš eilės didėjimo tvarka imsime natūraliąsias a reikšmes ir kiekvienai nustatysime jos teigiamus daliklius, tai gautos daliklių aibės mainysis gana įmantriai:

$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 2, 4, 8\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 2, 5, 10\}, \{1, 11\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \dots$
Tęsiant šią seką, pasitaikys vis didesnių aibių, tačiau niekur nedings ir mažesnės, įskaitant mažiausias galimas – sudarytas tik iš skaičių 1 ir a , kuriuos visada rasime tarp skaičiaus a daliklių. Natūralieji skaičiai a , turintys lygiai du teigiamus daliklius (taigi daliklius 1 ir a), vadinami **pirminiais**. Jie yra labai svarbūs tiek nusakant kitų sveikųjų skaičių daliklius, tiek skaičių teorijoje apskritai. Didėjimo tvarka jie sudaro seką 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Sudėtiniai skaičiai. Kiekvienas natūralusis nepirminis $a > 1$ turi daugiau nei du teigiamus daliklius, taigi turi daliklį d_1 , kuriam $1 < d_1 < a$, ir tuo pačiu daliklį $d_2 = a : d_1$, kuriam $1 < d_2 < a$. Natūralieji skaičiai, didesni už 1, kurie nėra pirminiai, vadinami **sudėtiniais**. Taigi kiekvienas sudėtinis skaičius yra dviejų mažesnių natūraliųjų skaičių sandauga $d_1 d_2$. Natūraliojo skaičiaus a teigiami dalikliai, nelygūs 1 ir a , vadinami jo **tikriniais dalikliais**. (Kartais tikriniu dalikliu laikomas ir skaičius 1, bet čia laikysimės nurodyto apibrėžimo.)

I teiginys. Kiekvienas sudėtinis skaičius yra kelių pirminių (nebūtinai skirtingų) skaičių sandauga.

Irodymas. Tarkime priešingai: kad esama sudėtinų skaičių, kurie nėra pirminių skaičių sandaugos. Sekoje 1, 2, 3, ... pasirinkime patį pirmąjį – mažiausiąjį – iš jų ir pažymėkime a . Tada $a = d_1 d_2$, kur natūralieji skaičiai d_1 ir d_2 yra tarp 1 ir a (neimtina). Remiantis mūsų prielaida, kiekvienas natūralusis skaičius tarp 1 ir a (neimtina) yra arba pirminis, arba pirminių skaičių sandauga. Tada ir tokių skaičių d_1 bei d_2 – pirminių skaičių arba jų sandaugų – sandauga $a = d_1 d_2$ yra pirminių skaičių sandauga. Gavome prieštarą, todėl teiginys teisingas. ■

Iš šio teiginio galima išvesti porą **išvadų**.

1) Kiekvienas sudėtinis skaičius dalijasi iš bent vieno pirminio skaičiaus. Pirminis skaičius visada dalijasi iš savęs paties. **Vadinasi**, kiekvienas natūralusis skaičius, didesnis už 1, turi pirminį daliklį.

2) Tarkime, kad natūralusis skaičius $n > 1$ sudėtinis. Tada jis yra natūraliųjų $d_1 > 1$ ir $d_2 > 1$ sandauga. Galime laikyti, kad $d_1 \leq d_2$. Skaičius d_1 turi pirminį daliklį $p \leq d_1$. Kadangi $n = d_1 d_2 \geq d_1^2 \geq p^2$, tai $p \leq \sqrt{n}$. **Vadinasi**, kiekvienas sudėtinis skaičius n turi pirminį daliklį, ne didesni už \sqrt{n} , o jei natūralusis $n > 1$ tokio daliklio neturi, tai skaičius n pirminis.

1 pavyzdys. Raskime visus pirminius skaičius intervale [320; 340]. Intervalo sveikieji skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 0, 2, 4, 6, 8 arba 5, dalijasi iš 2 arba iš 5, tad yra sudėtiniai. Kiti, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 3, patys dalijasi iš 3 ir taip pat yra sudėtiniai (tai skaičiai 321, 327, 333, 339). Lieka skaičiai 323, 329, 331, 337. Jie nesidalija iš 2, 3 arba 5. Kadangi $\sqrt{337} < 19$, tai pakanka tikrinti jų dalumą iš 7, 11, 13 ir 17 (iš pirminių skaičių, mažesnių nei 19, išskyrus 2, 3 ir 5). Jei kuris nors iš likusių intervalo skaičių sudėtinis, tai turės tokį daliklį, o jei neturės, tai jis pirminis. Tikrinant paaiškėja, kad $323 = 17 \cdot 19$ dalijasi iš 17, o $329 = 7 \cdot 47$ iš 7 (sudėtiniai skaičiai). O skaičiai $n = 331$ bei $n = 337$ neturi pirminių daliklių, ne didesnių už $\sqrt{n} < 19$, todėl yra pirminiai.

Atsakymas. 331, 337.

Jei d_1 ir d_2 yra natūralieji skaičiai, didesni už 1, tai skaičius $a = d_1 d_2$ sudėtinis. Juk tada a turi daliklį d_1 , kuris ne tik didesnis už 1, bet ir mažesnis už a , nes $d_2 > 1$ (daliklis d_1 tikrinis). Kai skaičius užrašytas reiškiniu, kartais galima tą reiškinį išskaidyti, atliekant algebrinius pertvarkymus, ir taip įrodyti, kad skaičius sudėtinis. **Pavyzdžiui**, $a = 150^{1150} - 11^{132}$ išskaidomas pagal kvadratų skirtumo formulę: natūralusis $a = (150^{575})^2 - (11^{66})^2$ turi daliklį $d_1 = 150^{575} - 11^{66} > 1$, iš kurio padaliję skaičių a gauname $d_2 = 150^{575} + 11^{66} > 1$. Taigi skaičius $a = d_1 d_2$ sudėtinis. Kvadratų skirtumą galima išvelgti ir skaičiuje $b = 150^{1150} - 121^{131}$, nors šiuo atveju vienas laipsnio rodiklis nelyginis: $b = (150^{575})^2 - (11^{131})^2$ turi (tikrinius) daliklius $150^{575} \pm 11^{131}$. Kvadratų skirtumo formulės naudingai nepritaikysime skaičiui $151^{1151} - 121^{131}$, bet čia to ir nereikia. Šis skaičius sudėtinis, nes tai dviejų nelyginių skaičių skirtumas ir turi tikrinį daliklį 2. Taip pat kvadratų skirtumo formulės nepritaikysime skaičiui $150^{1148} - 11^{133}$, bet čia verta prisiminti bendresnę formulę:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{skaičius } n > 1 \text{ natūralusis}).$$

Antruosiuose reiškinio skliaustuose sudėtos visos galimos n sandaugų $a^k b^{n-1-k}$, kur $k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$. Jei čia skaičiai a ir b sveikieji, $a \neq b$, tai sveikasis skaičius $a^n - b^n$ dalijasi iš $a - b$. Tarkime, kad skaičiai a ir b natūralieji, $a > b$. Tada $a^n - b^n = d_1 d_2$, kur $d_1 = a - b \geq 1$ ir $d_2 > 1$. Jei $a - b > 1$, tai skaičius $a^n - b^n$ sudėtinis. Atskiru atveju taip bus, jei $b = 1$ ir $a > 2$. Jei turimoje $a^n - b^n$ formulėje imsime nelyginį n ir vietoj b įrašysime $-b$, tai gausime $a^n + b^n$ formulę, iš kurios išplaukia, kad $a^n + b^n$ dalijasi iš $a + b$ (skaičiai a ir b sveikieji, $a \neq -b$). Jei skaičiai a ir b natūralieji ir bent vienas iš jų didesnis už 1, tai $1 < a + b < a^n + b^n$. Tokiu atveju skaičius $a^n + b^n$ turi tikrinį daliklį $a + b$ bei yra sudėtinis. Pabrėžkime, kad jei laipsnių rodiklis n lyginis, tai $a^n + b^n$ nebūtinai dalijasi iš $a + b$. Pavyzdžiui, $2^2 + 3^2 = 13$ nesidalija iš $2 + 3 = 5$.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad natūralieji skaičiai $a_1 = 3514^{9191} - 1665^{4403}$, $a_2 = 3514^{9190} + 1665^{4405}$, $a_3 = 100 \dots 001$ (tarp vienetų yra 220 nulių), $a_4 = 2^{129} - 1$, $a_5 = 1222^{1279} - 1$ sudėtiniai. Tam pakanka nurodyti po tikrinį jų daliklį. Skaičius $9191 = 91 \cdot 101 = 7 \cdot 13 \cdot 101$ dalijasi iš skaičių 7, 13, 101. Iš jų dalydami skaičių 4403, aptinkame ir jo dalumą iš 7. Taigi $a_1 = (3514^{1313})^7 - (1665^{629})^7$ turi tikrinį daliklį $d_1 = 3514^{1313} - 1665^{629}$. Lengva pastebėti skaičių 9190 ir 4405 bendrą nelyginį daliklį 5 bei tikrinį a_2 daliklį $d_2 = 3514^{1838} + 1665^{881}$. Skaičius $a_3 = 10^{221} + 1 = (10^{13})^{17} + 1^{17}$ turi tikrinį daliklį $d_3 = 10^{13} + 1$, skaičius $a_4 = (2^3)^{43} - 1$ – tikrinį daliklį $d_4 = 2^3 - 1 = 7$, o skaičius $a_5 = 1222^{1279} - 1^{1279}$ – tikrinį daliklį $d_5 = 1222 - 1 = 1221$. ■

Jei išnagrinėtume pavyzdyje turėtume skaičių $2^{1279} - 1$, tai negalėtume gauti jo tikrinio daliklio kaip skaičiui a_5 , nes tegautume (netikrinį) daliklį $2 - 1 = 1$. Taip pat negalėtume gauti tikrinio daliklio kaip skaičiui a_4 , nes skaičius 1279 pirminis, kitaip nei $129 = 3 \cdot 43$. Skaičiai $M_n = 2^n - 1$, kur skaičius n natūralusis, vadinami **Merseno skaičiais** (prancūzų matematikas Marin Mersenne, 1588–1648). Pavyzdyje matėme, kad Merseno skaičius $a_4 = M_{129}$ sudėtinis. Tuo įsitikinti padėjo pastebėjimas, kad indeksas $n = 129 = 3 \cdot 43$ sudėtinis. Esama ir pirminių Merseno skaičių. Jie gaunami imant pirmines n reikšmes: $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, Visgi net su pirminiu n skaičius M_n gali būti sudėtinis, pavyzdžiui, $M_{11} = 23 \cdot 89$. Merseno skaičiai svarbūs, ieškant didelių pirminių skaičių. Šiuo metu (2025 m. pradžioje) didžiausias nustatytas pirminis skaičius yra $M_{136\,279\,841}$, turintis 41 024 320 skaitmenų. Neskaitant jo, šeši didžiausi nustatyti pirminiai skaičiai taip pat yra Merseno skaičiai. Nuo 1952 m., kai buvo nustatyta, kad skaičius M_{521} , turintis 157 skaitmenis, yra pirminis, didžiausias nustatytas pirminis skaičius visada buvo Merseno skaičius, išskyrus pertrauką nuo 1989 iki 1992 metų. Dideli pirminiai skaičiai (nors ir ne patys didžiausieji tarp šiuo metu žinomų) yra svarbūs kriptografijoje – informacijos šifravimo ir iššifravimo moksle, nuo kurio priklauso kibernetinis saugumas.

Toliau mums pravars toks pastebėjimas: jei natūralieji skaičiai a ir b dalijasi iš natūraliojo skaičiaus n atitinkamai su liekana 1 ir su liekana r , tai jų sandauga dalijasi iš n su liekana r . Tai išplaukia iš tapatybės $(nk_1 + 1)(nk_2 + r) = n(nk_1 k_2 + rk_1 + k_2) + r$. Tada dauginant bet kiek natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš n su liekana 1, gautoji sandauga dalijasi iš n su liekana 1. Pavyzdžiui, skaičius 1667 dalijasi iš 5 su liekana 2, bet galima patikrinti, kad 1667^4 dalijasi iš 5 su liekana 1. Skaičius 1667^{4400} yra kelių (1100-o) skaičių, lygių 1667^4 , sandauga, tad taip pat dalijasi iš 5 su liekana 1. Tada 1667^{4401} , 1667^{4402} ir 1667^{4403} dalijasi iš 5 atitinkamai su ta pačia liekana kaip 1667^1 , 1667^2 ir 1667^3 , taigi su liekana 2, 4 ir 3.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad natūralieji skaičiai $a_1 = 3514^{9192} - 1667^{4402}$, $a_2 = 3514^{9191} + 1667^{4401}$ ir $a_3 = 3514^{9192} + 1667^{4402}$ sudėtiniai. Skaičiaus a_1 atveju pakanka pastebėti skaičių 9192 ir 4402 bendrą daliklį 2, o tada – skaičiaus a_1 tikrinį daliklį $3514^{4596} - 1667^{2201}$. Skaičiui a_3 šios idėjos nepritaikysime, nes turime laipsnių sumą, o ne skirtumą, tad laipsnių rodiklių bendras lyginis daliklis 2 netinka. Nelyginio bendro daliklio, didesnio už 1, nei skaičiams 9192 ir 4402, nei (skaičiaus a_2 atveju) skaičiams 9191 ir 4401 nerasime. Todėl šiuo atveju mąstytkime kitaip: tikrinkime skaičių a_2 ir a_3 dalumą iš 2, 3, 5, Iš 2 jie nesidalija kaip lyginio ir nelyginio skaičių sumos.

Skaiciai 3514 ir 1667^2 dalijasi iš 3 su liekana 1, todėl 3514^{9191} dalijasi iš 3 su liekana 1, o $1667^{4401} = (1667^2)^{2200} \cdot 1667$ su ta pačia liekana 2 kaip skaičius 1667. Pažymėję $3514^{9191} = 3k + 1$, $1667^{4401} = 3l + 2$, gauname, kad $a_2 = (3k + 1) + (3l + 2) = 3(k + l + 1)$ turi tikrinį daliklį 3. Pakartoję šiuos samprotavimus su a_3 , norimo rezultato negautume: $a_3 = 3514^{9192} + 1667^{4402} = (3k_1 + 1) + (3l_1 + 1) = 3(k_1 + l_1) + 2$. Skaiciai 3514^2 ir 1667^4 dalijasi iš 5 su liekana 1, todėl $3514^{9192} = (3514^2)^{4596}$ dalijasi iš 5 su liekana 1, o $1667^{4402} = (1667^4)^{1100} \cdot 1667^2$ su ta pačia liekana 4 kaip 1667². Pažymėję $3514^{9192} = 5k_2 + 1$, $1667^{4402} = 5l_2 + 4$ gauname, kad $a_3 = (5k_2 + 1) + (5l_2 + 4) = 5(k_2 + l_2 + 1)$ turi tikrinį daliklį 5. ■

Mums pasisekė, kad pavyzdyje dideli skaičiai a_2 ir a_3 turi mažus pirminius daliklius. Bendruoju atveju patikrinimas, ar duotas didelis skaičius yra pirminis, ar sudėtinis, gali būti kur kas ilgesnis, per trumpą laiką neįveikiamas net kompiuteriui. Išnagrinėkime dar porą ypatingų – užrašomų išskaidomais reiškiniais – skaičių.

4 pavyzdys. Įrodykite, kad skaičius c sudėtinis, kai a) $c = 625^{673} + 2^{674}$; b) $c = 2 \cdot 3^{990} + 2 \cdot 3^{661} - 3^{330} - 10$.

a) Pastebėkime, kad $c = a^2 + b^2$, kur $a = 25^{673}$ ir $b = 2^{337}$. Kadangi $2ab = (5^{673})^2 \cdot (2^{169})^2$ yra sveikąjo skaičiaus kvadratas, tai pridėję ir atėmę jį iš c , gauname kvadratų skirtumą:

$$c = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = (a + b)^2 - (5^{673} \cdot 2^{169})^2 = (25^{673} + 2^{337} - 5^{673} \cdot 2^{169})(25^{673} + 2^{337} + 5^{673} \cdot 2^{169}).$$

Čia pirmasis dauginamasis d_1 mažesnis už antrąjį, bet didesnis už 1, nes $25^{673} > 5^{673} \cdot 2^{169}$. Taigi tai tikrinis c daliklis.

b) Turime $c = f(3^{330})$, kur $f(n) = 2n^3 + 6n^2 - n - 10$. Tikrinant sveikąsias n reikšmes, galima pastebėti, kad daugianaris f turi šaknį -2 , t. y. $f(-2) = 0$. Jei bet koks daugianaris $p(x)$ turi šaknį c , tai jis lygus $(x - c)p_1(x)$, kur $p_1(x)$ yra daugianaris. Taigi $f(n)$ turi būti įmanoma išskaidyti taip, kad vienas dauginamasis būtų $n - (-2) = n + 2$. Pamėginkime tai atlikti, dirbtinai reiškinyje sudarydami narius, besidalijančius iš $n + 2$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n^2(n + 2) - 4n^2 + 6n^2 - n - 10 = 2n^2(n + 2) + 2n^2 - n - 10 = \\ &= 2n^2(n + 2) + 2n(n + 2) - 4n - n - 10 = (2n^2 + 2n)(n + 2) - 5n - 10 = (2n^2 + 2n - 5)(n + 2). \end{aligned}$$

Skaičius c lygus $d_1 d_2$, kur $d_1 = 3^{330} + 2 > 1$, $d_2 = 2 \cdot 3^{660} + 2 \cdot 3^{330} - 5 > 1$, taigi yra sudėtinis.

c) Atsakykime į papildomą klausimą apie $f(n)$ iš b dalies: kokios yra pirminės $|f(n)|$ reikšmės, kai n sveikasis? Pirminio p vieninteliai skaidiniai dviem sveikaisiais dauginamaisiais yra $1 \cdot p = p \cdot 1 = (-1) \cdot (-p) = (-p) \cdot (-1)$. Todėl jei skaičius n sveikasis, o skaičius $|f(n)|$ pirminis, tai $n + 2 = \pm 1$ arba $2n^2 + 2n - 5 = \pm 1$. Tada $n = -1$, -3 , $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, 1 arba -2 . Trys n reikšmės -1 , -3 , 1 tinka. Atitinkamos $|f(n)|$ reikšmės sudaro **atsakymą**: 5, 7, 3. ■

5 pavyzdys. Nustatykite visas pirmines $|f(n)|$ reikšmes, kai n sveikasis, $f(n) = 2n^3 + n^2 - n - 4$. Šiuo atveju daugianaris $f(n)$ sveikųjų šaknų neturi, tad jo neišskaidysime, kitaip nei 4 pavyzdyje. Bet tai ir nebūtina. Pastebėkime, kad skaičius $n^2 - n$ visada lyginis (dviejų lyginių arba nelyginių skaičių skirtumas). Todėl lyginės yra ir visos rūpimos $f(n) = 2(n^3 - 2) + (n^2 - n)$ bei $|f(n)|$ reikšmės. Skaičius $|f(n)|$ turi būti pirminis ir lyginis. Kiekvienas pirminis skaičius p dalijasi tik iš ± 1 ir iš $\pm p$, tad jei p lyginis, t. y. turi daliklį 2, tai $p = 2$. Taigi turime ieškoti sveikųjų n , kuriems $f(n) = \pm 2$. Lengva pastebėti, kad $f(1) = -2$. Taigi $|f(n)|$ įgyja vienintelę pirminę reikšmę 2.

Papildykime uždavinį: raskime visus sveikuosius n , kuriems skaičius $|f(n)|$ pirminis. Tada $f(n) = \pm 2$ ir $2n^3 + n^2 - n = 4 \pm 2$. Kadangi $2n^3 + n^2 - n$ dalijasi iš n , tai iš n dalijasi $4 + 2 = 6$ arba $4 - 2 = 2$. Liko tiesiogiai patikrinti galimybes $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Gauname **atsakymą**: $|f(1)| = 2$; $|f(n)|$ nepirminis sveikiesiems $n \neq 1$. ■

Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai aritmetinėse progresijose. Prisiminkime: aritmetinė progresija yra tokia seka $a, a + d, a + 2d, \dots$, kurios kiekvienas naujas narys gaunamas, prie paskutinio gauto nario pridėjus duotą skaičių d . Čia nagrinėsime tik begalines aritmetines progresijas, kurioms a ir d yra natūralieji skaičiai.

6 pavyzdys. Nagrinėkime aritmetinę progresiją 3, 7, 11, ..., sudarytą iš visų natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 4 su liekana 3. Pirminius skaičius joje sunumeruokime didėjimo tvarka: $q_1 = 3, q_2 = 7, q_3 = 11, q_4 = 19, \dots$

a) Nustatykite, ar seka q_1, q_2, \dots baigtinė, ar begalinė. Mums pravėrs du pastebėjimai.

1) Natūralieji skaičiai dalijasi iš 4 su liekana 0, 1, 2 arba 3 bei sudaro atitinkamas progresijas 4, 8, 12, ...; 1, 5, 9, ...; 2, 6, 10, ...; 3, 7, 11, Trečiojoje iš jų visi skaičiai turi daliklį 2, todėl visi, išskyrus patį skaičių 2, yra sudėtiniai. Analogiškai pirmojoje progresijoje visi skaičiai sudėtiniai. Taigi kiekvienas pirminis skaičius arba dalijasi iš 4 su liekana 1 arba 3, arba yra lygus 2.

2) Sudauginę bet kiek natūraliųjų skaičių, besidalijančių iš 4 su liekana 1, gausime sandaugą, kuri taip pat dalijasi iš 4 su šia liekana. Taigi pirminių skaičių iš progresijos 1, 5, 9, ... sandauga niekada nesidalija iš 4 su liekana 3.

Dabar tarkime, kad progresijoje 3, 7, 11, ... pirminių skaičių kiekis tėra baigtinis. Nagrinėkime visų šių pirminių skaičių sandaugą $Q = q_1 q_2 q_3 \dots q_k$. Skaičius $4Q - 1$ nesidalija iš q_k (priešingu atveju dalytųsi $4Q - (4Q - 1) = 1$). Analogiškai $4Q - 1$ nesidalija iš q_1, q_2, \dots, q_{k-1} , taip pat iš 2. Kadangi skaičius $4Q - 1 = 4(Q - 1) + 3$ nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus, kurio dalybos iš 4 liekana yra 3, nei iš 2, tai šis skaičius pats nėra pirminis ir yra pirminių skaičių iš progresijos 1, 5, 9, ... sandauga. Tačiau tada ši sandauga $4(Q - 1) + 3$ dalijasi iš 4 su liekana 1. Gavome prieštarą. Vadinas, duotojoje progresijoje yra be galo daug pirminių skaičių q_1, q_2, \dots

b) Lengviau yra pagrįsti, kad duotojoje progresijoje yra ir be galo daug sudėtinių skaičių. Iš tiesų, jos nariai gaunami prie pirmojo nario 3 kelis kartus pridėdant 4, ir tarp jų galima aptikti be galo daug skaičių $3 + 4 \cdot 3, 3 + 4 \cdot 6, 3 + 4 \cdot 9, \dots$, kurie visi dalijasi iš 3, bet yra didesni už 3, tad yra sudėtiniai. Skaičių liks be galo daug, net jei kiek sustiprinsime sąlygą ir ieškosime progresijos narių, kurie turi daugiau nei 6 teigiamus daliklius. Iš eilės perrinkdami narius, randame skaičių $63 = 3^2 \cdot 7$, kuris turi 6 daliklius 1, 3, 7, 9, 21, 63. Prie jo vis pridėdami 4, gauname be galo daug progresijos narių $63 + 4 \cdot 63k$, kur $k = 1, 2, 3, \dots$. Jie visi dalijasi iš 63, bet yra didesni už 63,

taigi turi tuos pačius 6 skaičius 63 daliklius ir dar bent po vieną teigiamą daliklį (patį skaičių). Vadinasi, progresijoje yra be galo daug narių, kurie turi daugiau nei 6 daliklius. ■

7 pavyzdys. Apie pirminius skaičius aritmetinėje progresijoje dar galima klausti, kiek daugiausiai iš eilės einančių progresijos narių gali būti pirminiai skaičiai. Į šį klausimą atsakykime progresijoms a) 3, 7, 11, ...; b) 1, 31, 61, ...

a) Seka prasideda trimis pirminiais skaičiais 3, 7, 11, po kurių eina sudėtinis skaičius 15. Toliau joje negausime daugiau nei dviejų gretimų pirminių narių, nes sudėtinius narius $3 + 4 \cdot 3$, $3 + 4 \cdot 6$, $3 + 4 \cdot 9$, ... turime kas trečioje pozicijoje (skaičiuojant nuo antrojo nario), o tarp bet kurių dviejų tokių pozicijų yra tik po du narius.

b) Progresijoje ketvirtasis narys 91 dalijasi iš 7 (yra sudėtinis). Todėl kas septintas narys, skaičiuojant nuo penktojo, yra sudėtinis: tai skaičiai $91 + 30 \cdot 7k$, kur $k = 1, 2, 3, \dots$, besidalijantys iš 7. Tarp tokių narių progresijoje yra po 6 narius, todėl joje negali būti daugiau nei 6 iš eilės einantys pirminiai nariai. Kita vertus, tiesiogiai tikrinant galima aptikti 6 pirminius progresijos narius 541, 571, 601, 631, 661, 691.

Atsakymas. a) 3; b) 6.

6 pavyzdyje radome didėjančią progresiją, kurioje yra be galo daug pirminių skaičių. **Vadinasi**, pirminių skaičių yra be galo daug. Be to, galima įrodyti (nors ir daug sudėtingiau), kad be galo daug pirminių skaičių yra kiekvienoje aritmetinėje progresijoje $a, a + d, a + 2d, \dots$, kur a ir d yra natūralieji skaičiai, neturintys bendro daliklio, didesnio už 1. Šis teiginys vadinamas **Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas** (vokiečių matematikas Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859). Pavyzdžiui, yra be galo daug pirminių skaičių progresijoje 7, 29, 51, ..., t. y. be galo daug pirminių skaičių, kurie dalijasi iš 22 su liekana 7. Taigi lygtis $p = 22n + 7$ turi be galo daug sprendinių (n, p) , kur skaičius n natūralusis, o skaičius p pirminis.

Skaidinys pirminiais daugikliais. Skaidant skaičių dauginamaisiais (net ir pirminį), visada galima prirašyti bet kiek daugiklių, lygių 1. Atmetus ypatingąjį – nei pirminį, nei sudėtinį – daugiklį 1, pirminiai skaičiai tampa neišskaidomi (jų vienintelis skaidinys $p = 1 \cdot p = p \cdot 1$). Taigi pagal 1 teiginį visi sudėtiniai skaičiai daugybos požiūriu sudaryti iš pirminių skaičių, kurie yra lyg nedalomos dalelės, natūraliųjų skaičių atomai. Skaičių teorijoje itin svarbus pastebėjimas, kad, turint du šių atomų rinkinius, iš jų sudaryti skaičiai bus skirtingi, nebent patys rinkiniai sutaptų (galbūt elementų tvarkai juose skiriantis). Tai įrodyti mums padės toks pagalbinis teiginys.

2 teiginys. Tarkime, kad natūraliųjų skaičių sandauga $a \cdot b$ dalijasi iš pirminio skaičiaus p . Tada bent vienas iš dauginamųjų a ir b taip pat dalijasi iš p .

Įrodytas. Išivaizduokime mechaninį laikrodį su viena rodykle, kurio ciferblatas turi p padalų, iš eilės ratu pažymėtų skaičiais 0, 1, 2, ..., $p - 1$. Tarkime, kad pradinė rodyklės padėtis yra padala 0 ir kad vienu ėjimu leidžiama pasukti rodyklę per a padalų pagal laikrodžio rodyklę. Jei po pirmojo ėjimo rodyklė grįžta į pradinę padėtį, tai posūkis per a padalų yra vienas ar keli posūkiai per p padalų. Tada a dalijasi iš p . Toliau tarkime, kad a nesidalija iš p ir tada po pirmojo ėjimo rodyklė atsiduria ties padala r , kur $r > 0$. Turime įrodyti, kad b dalijasi iš p .

Kartojant ėjimus, rodyklė pradžioje sustoja ties padala $r > 0$, o toliau gali sustoti ir ties kitomis padalomis. Mažiausią teigiamą skaičių, ties kurio padala sustoja taip sukama rodyklė, pažymėkime r_0 . Tarkime, kad rodyklė atsiduria ties r_0 po k ėjimų. Tada bet kurie k ėjimų prilygsta rodyklės posūkiui per r_0 padalų. Kartojant tokį posūkį (pradėjus ties 0), po kelių posūkių atliksime pirmą pilną apsisukimą apie ciferblato centrą, pasiekę ir galbūt prašokę 0. Jei rodyklė sustoja tiksliai ties 0, tai p dalijasi iš r_0 . Kadangi $0 < r_0 < p$, o skaičius p pirminis, tai $r_0 = 1$. Priešingu atveju rodyklė, prieš prašokdama padalą 0, būtų mažiau nei per r_0 padalų nuo jos, o kitu posūkiu prašokusi ją, atsidurtų ties padala r_1 , kur $0 < r_1 < r_0$. Tai prieštarauja mūsų užfiksuoto skaičiaus r_0 minimalumui. Vadinasi, $r_0 = 1$.

Pradžioje atlikus $k \cdot b$ ėjimų, rodyklė pasukama per $a \cdot k \cdot b = kab$ padalų. Čia ab dalijasi iš p , todėl kab dalijasi iš p , o per tiek padalų pasukta rodyklė sustoja ties 0. Kita vertus, k ėjimų prilygsta rodyklės posūkiui per $r_0 = 1$ padalą, todėl atlikus $k \cdot b$ ėjimų rodyklė pasukama per b padalų. Taigi posūkis per b padalų grąžina rodyklę į pradinę padėtį 0 ir prilygsta vienam ar keliems posūkiams per p padalų. Tada b dalijasi iš p – tai ir reikėjo įrodyti. ■

Įrodyte gautas tarpinis rezultatas $r_0 = 1$ reiškia, kad duotas natūralusis a visada turi kartotinį $ka > 0$, kuris dalijasi iš duoto pirminio p su liekana 1. Išspręsimė susijusį uždavinį, susišaukiantį su 2 teiginio įrodymo idėjomis.

8 pavyzdys. Intervale $[0; 826]$ raskime natūraliuosius k ir l , kuriems $227k$ dalijasi iš (pirminio) skaičiaus 827 su liekana 1, o $227l$ su liekana 48. Nagrinėkime ciferblatą su 827 padalomis 0, 1, ..., 826 ir viena rodykle, kurios pradinė padėtis yra 0. Po $k_1 = 4$ ėjimų, kai rodyklė sukama per 227 padalas, jos padėtis bus $4 \cdot 227 - 827 = 81$. Po $k_2 = 11$ posūkių per 81 padalą (kiekvienas toks posūkis gaunamas per k_1 ėjimų) rodyklė bus ties $11 \cdot 81 - 827 = 64$. Po $k_3 = 13$ posūkių per 64 padalą ji bus ties $13 \cdot 64 - 827 = 5$; po $k_4 = 166$ posūkių per 5 padalą – ties $166 \cdot 5 - 827 = 3$; pagaliau po $k_5 = 276$ posūkių per 3 padalą – ties $276 \cdot 3 - 827 = 1$. Taigi atliekant ėjimus, kai sukama per 227 padalą, po $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = 26\,206\,752$ ėjimų rodyklė atsidurs ties 1. Kaskart atlikus 827 ėjimus, rodyklė grįžta į pradinę padėtį. Todėl vietoj $26\,206\,752 = 827 \cdot 31\,688 + 776$ pakanka atlikti $k = 776$ ėjimus. Po tiek ėjimų rodyklė atsiduria padėtyje 1, tad padėtį 48 gausime po $776 \cdot 48 = 37\,248 = 827 \cdot 45 + 33$ arba po $l = 33$ ėjimų.

Atsakymas. $k = 776$, $l = 33$.

2 teiginys vadinamas **Euklido lema** (senovės graikų matematikas Euklidas Aleksandrietis, apie 300 m. pr. Kr.). Jis nusako esminę pirminių skaičių savybę, kuri juos išskiria tarp sudėtinių skaičių. Jokiam sudėtiniam skaičiui p šis teiginys negalioja. Pavyzdžiui, jei $p = 6$, tai $12 = 4 \cdot 3$ dalijasi iš p , bet nei $a = 4$, nei $b = 3$ nesidalija. Iš Euklido lemos išplaukia jos **apibendrinimas**: sudauginus bet kiek natūraliųjų skaičių ir jų sandaugai dalijantis iš pirminio skaičiaus p , iš jo turi dalytis bent vienas dauginamasis. Iš to savo ruožtu išplaukia, kad kelių natūraliųjų skaičių,

nesidalijančių iš pirminio p , sandauga iš p niekada nesidalija. Jokie du skirtingi pirminiai skaičiai vienas iš kito nesidalija (pirminio skaičiaus apibrėžimas), tad atskiru atveju gauname tokią **išvadą**: kelių (nebūtinai skirtingų) pirminių skaičių sandauga nesidalija iš jokių pirminių skaičių, išskyrus sudaugintuosius.

Pavyzdžiui, nedalydami skaičiaus $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 41 = 2^3 \cdot 13 \cdot 41^2$ iš 7 su liekana, ir taip galime būti tikri, kad jis iš 7 nesidalija. Taip pat galime būti tikri, kad a nesidalija iš $91 = 7 \cdot 13$: jei a dalytųsi iš 91, o $91 -$ iš 7, tai a dalytųsi iš 7. Matome, kad a dalijasi iš 41 ir iš 41^2 . Ar jis gali dalytis iš 41^3 ar skaičiaus 41 dar didesnio laipsnio? Jei dalytųsi, tai turėtume $a = 41^3 \cdot b$, kur skaičius b sveikasis. Padaliję šią lygybę iš 41^2 , gautume $2^3 \cdot 13 = 41 \cdot b$. Ši lygybė klaidinga, nes jos dešinioji pusė vis dar dalijasi iš pirminio skaičiaus 41, o kairioji (kaip kitokių pirminių skaičių sandauga) nesidalija. Analogiškai įrodoma, kad a dalijasi iš $2^0 (= 1)$, 2^1 , 2^2 , 2^3 , bet ne iš 2^4 , 2^5 , ... ir apskritai kad pirminių skaičių sandauga, kurioje dauginamasis p sutinkamas lygiai n kartų, dalijasi iš p^0 , p^1 , p^2 , ..., p^n , bet ne iš p^{n+1} , p^{n+2} , ... (įskaitant atvejį $n = 0$). Vadinasi, jei dvi pirminių skaičių sandaugos yra lygios, tai joks pirminis skaičius kaip dauginamasis negali būti sutinkamas vienoje iš jų daugiau kartų nei kitoje (kitaip viena sandauga dalytųsi iš tokio pirminio skaičiaus didesnio laipsnio nei kita). Taigi lygiose pirminių skaičių sandaugose kiekvienas pirminis skaičius kaip dauginamasis pasikartoja po tiek pat kartų. Tai įrodo 3 teiginį.

3 teiginys. Dvi (nebūtinai skirtingų) pirminių skaičių sandaugos yra lygios tada ir tik tada, kai skiriasi nebent dauginamųjų tvarka.

Prisiminkime 1 teiginį: sudėtiniai skaičiai yra pirminių skaičių sandaugos. 3 teiginys nurodo, kad kiekvienam sudėtiniam skaičiui tokia sandauga yra vienintelė dauginamųjų tvarkos tikslumu (t. y. nekreipiant dėmesio į dauginamųjų tvarką). Turint pirminių skaičių sandaugą, visus vienodus pirminius skaičius joje galima sugrupuoti ir užrašyti skaičių laipsniais (pvz., $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$). Tokiu būdu gaunama kiekvieno sudėtinio skaičiaus išraiška skirtingų pirminių skaičių laipsniais – to skaičiaus **skaidinys pirminiais daugikliais** (trumpinsime **SPD**). Dabar galime apjungti 1 ir 3 teiginius bei taip **performuluoti**: kiekvienas sudėtinis skaičius turi lygiai vieną skaidinį pirminiais daugikliais dauginamųjų tvarkos tikslumu. Šis teiginys vadinamas **Pagrindine aritmetikos teorema** (trumpinsime **PAT**). Jo svarbą sunku pervertinti: SPD egzistavimas ir vienatis leidžia efektyviai analizuoti skaičių dalumo savybes ir išspręsti įvairius skaičių teorijos uždavinius.

Nagrinėkime baigtinius pirminių skaičių rinkinius, kuriuose elementai gali kartotis, o elementų tvarka nesvarbi. Iš esmės Pagrindinė aritmetikos teorema nusako abipus vienareikšmį atitikimą tarp natūraliųjų skaičių ir tokių rinkinių. Kiekvieną sudėtinį skaičių a atitinka jo unikalus ir vienintelis rinkinys – keli (daugiau nei vienas) pirminiai skaičiai, kurių sandauga lygi a . Pirminius skaičius atitinka rinkiniai iš vieno skaičiaus, o ypatingąjį skaičių 1 – ypatingasis tuščias rinkinys (turintis 0 elementų). Formaliai galima laikyti, kad pirminiai skaičiai yra pirminių skaičių sandaugos iš vieno dauginamojo, o skaičius 1 – tokia „sandauga“ iš 0 dauginamųjų.

Skaičiaus n SPD bendruoju atveju atrodo taip: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Čia p_1, p_2, \dots, p_k – skirtingi pirminiai skaičiai (kurių yra $k \geq 1$), skaičiai a_1, a_2, \dots, a_k – natūralieji. Galima neatmesti ir atvejo $k = 1, a_1 = 1$: tada skaičius $n = p_1$ yra pirminis, ir jo skaidiniu pirminiais daugikliais laikykime jį patį (formali sandauga iš vieno pirminio dauginamojo). Galime **pakeisti PAT formulotę**, išplėsdami skaičių, kuriems teorema teisinga, aibę: po lygiai vieną SPD turi ne tik sudėtiniai, bet apskritai visi natūralieji $n > 1$. Tarkime, kad natūraliojo $n > 1$ SPD yra $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Tada visi skaičiai $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$, kur kiekvienas b_i yra bet koks sveikasis skaičius tarp 0 ir a_i (imtina), yra skaičiaus n teigiami dalikliai. Kitų teigiamų daliklių skaičius n neturi (jei turėtų, tai n turėtų ir antrą, kitokį SPD), ir jokios dvi $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ reikšmės nesutampa (jei sutaptų, tai išraiškose nubraukę nereikalingus daugiklius p_i^0 , vėlgi gautume dviejų SPD lygybę, prieštaraujančią PAT). Kadangi n teigiamo daliklio $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ išraiškoje kiekvienas rodiklis b_i gali įgyti bet kurią iš $a_i + 1$ reikšmių 0, 1, ..., a_i nepriklausomai nuo kitų rodiklių, tai skaičius n turi lygiai $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ teigiamų daliklių. Pavyzdžiui, skaičius $2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ turi $(1 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 24$ teigiamus daliklius (ir atitinkamai dar 24 neigiamus).

9 pavyzdys. Tarkime, kad natūraliojo n SPD yra $3^{1000} \cdot p^3$ (čia skaičius $p \neq 3$ pirminis). Įrodykime, kad yra be galo daug p reikšmių, kurioms n visų teigiamų daliklių suma dalijasi iš 13, ir nustatykime 7-ąją mažiausią tokią reikšmę. Skaičiaus n teigiami dalikliai yra skaičiai $3^x \cdot p^y$, kur $x = 0, 1, 2, \dots, 1000$ ir $y = 0, 1, 2, 3$. Kai $y = 0$, gauname daliklius, kurių suma s_0 yra $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{1000}$. Ją galima apskaičiuoti pagal geometrinės progresijos sumos formulę arba pastebėjus, kad $3s_0 = s_0 - 1 + 3^{1001}$ ir todėl $s_0 = \frac{3^{1001} - 1}{2}$. Sudėję visus daliklius, kuriems $y = 1$, gauname $s_1 = p + 3 \cdot p + 3^2 \cdot p + \dots + 3^{1000} \cdot p = s_0 \cdot p$. Analogiškai gauname likusių daliklių sumas $s_2 = s_0 \cdot p^2$ ir $s_3 = s_0 \cdot p^3$ bei visų teigiamų daliklių sumą

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = s_0 \cdot (1 + p + p^2 + p^3) = \frac{3^{1001} - 1}{2} \cdot (1 + p + p^2 + p^3).$$

Jei s dalijasi iš pirminio skaičiaus 13, tai bent vienas iš dauginamųjų $1 + p + p^2 + p^3$ ir $s_0 = \frac{3^{1001} - 1}{2}$ dalijasi iš 13 (Euklido lema). Jei skaičius s_0 dalijasi iš 13 (tokiu atveju s dalumas iš 13 nuo p nepriklausytų), tai ir jo kartotinis $2s_0 = 3^{1001} - 1$ dalijasi iš 13, t. y. 3^{1001} dalijasi iš 13 su liekana 1. Tikrindami reikšmes 3, 3^2 , 3^3 , ..., pastebime, kad 3^3 dalijasi iš 13 su liekana 1. Todėl $3^{1001} = (3^3)^{333} \cdot 3^2$ dalijasi iš 13 su liekana 9 (kaip skaičius 3^2). Vadinasi, iš 13 būtinai turi dalytis $1 + p + p^2 + p^3$. Pažymėkime $p = 13k + r$, kur r – atitinkamos dalybos iš 13 liekana. Šią p išraišką įrašę reiškinyje $1 + p + p^2 + p^3$ ir jį atskliautę, gauname $13 \cdot \dots + 1 + r + r^2 + r^3$, kur vietoj daugtaškio

yra sveikasis skaičius (priklausantis nuo k ir r). Taigi iš 13 turi dalytis $1 + r + r^2 + r^3$. Patikrinę visas galimas liekanos reikšmes $r = 0, 1, \dots, 12$, gauname: tinka visi pirminiai $p \neq 3$, kurie dalijasi iš 13 su liekana 5, 8 arba 12. Tinkamų p reikšmių yra be galo daug, nes aritmetinėse progresijose 5, 18, 31, ...; 8, 21, 34, ...; 12, 25, 38, ... yra po be galo daug pirminių skaičių (Dirichlė teorema). Tai ir reikėjo įrodyti. Rašydami didėjimo tvarka trijų progresijų narius (prie 5, 8, 12 vis pridedame po 13) ir pabraukdami tik tuos, kurie yra pirminiai, nustatome 7-ąjį tinkamą p :

5, 8, 12, 18, 21, 25, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 57, 60, 64, 70, 73, 77, 83, 86, 90, 96, 99, 103, 109, ...

Atsakymas. $p = 109$.

Pastaba. Pavyzdyje gavome, kad $3^{1000} \cdot p^3$ teigiamų daliklių suma yra skaičiaus 3^{1000} tokių daliklių sumos s_0 ir skaičiaus p^3 tokių daliklių sumos $1 + p + p^2 + p^3$ sandaugai. Ši dėsningumą galima **apibendrinti**: jei natūraliojo $n > 1$ SPD yra $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, tai užrašę kiekvieno laipsnio $p_i^{a_i}$ teigiamų daliklių sumą $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}$, šias sumas sudauginę ir sandaugą pilnai atskliautę, gausime sandaugų $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ – skaičiaus n visų teigiamų daliklių – sumą. Pavyzdžiui, skaičiui $n = 12 \cdot 375 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$ sandauga $(1 + 3 + 9)(1 + 5 + 25 + 125)(1 + 11) = 13 \cdot 156 \cdot 12 = 24 \cdot 336$ yra skaičiaus n teigiamų daliklių suma, nes trijų sumų sandaugoje visais įmanomais būdais imant po vieną skaičių iš pirmosios, antrosios ir trečiosios sumos, trijų skaičių sandaugos yra visi įmanomi teigiami n dalikliai: $1 \cdot 1 \cdot 1$, $3 \cdot 5^3 \cdot 1$, $3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$ ir t. t. Įdomu, kad panašiai galima mąstyti ir apie kai kurias begalines sumas bei sandaugas. Pavyzdžiui, skaičių $\frac{1}{n^2}$, kur $n = 1, 2, 3, \dots$, suma $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ gaunama, sudauginant visas įmanomas (geometrinių progresijų) sumas $1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots$, kur skaičius p pirminis. Taigi šių sumų, kurių reikšmės yra $\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \frac{p^2}{p^2-1} = \frac{p \cdot p}{(p-1) \cdot (p+1)}$, begalinė sandauga $\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \dots$ lygi begalinei sumai S . Savo ruožtu yra įrodyta, kad $S = \frac{\pi^2}{6}$, kur $\pi = 3,14\dots$ yra garsioji geometrinė konstanta!

ANTROJI UŽDUOTIS

- Patikrinkite, kad intervale (2015; 2035) trys skaičiai yra pirminiai, o likę 16 sveikųjų skaičių jame yra sudėtiniai.
- Duota, kad kažkurie du iš skaičių $a_1 = 2^{11 \cdot 09} - 1$, $a_2 = 2^{11 \cdot 213} - 1$, $a_3 = 2^{11 \cdot 213} + 1$, $a_4 = 42^{11 \cdot 213} - 1$, $a_5 = 2^{162} + 2^{11 \cdot 210}$, $a_6 = 2^{16} + 1$, $a_7 = 2^{80} + 1$ yra pirminiai. Likusiems penkiems skaičiams nustatykite po tikrinį daliklį ir taip įrodykite, kad jie sudėtiniai (dviejų pirminių skaičių nenagrinėkite).
- Skaičiams $a_1 = 237^{3913} - 10^{817}$, $a_2 = 23^{3913} + 10^{718}$, $a_3 = 81^{815} + 25 \cdot 10^{814}$ nustatykite po tikrinį daliklį ir taip įrodykite, kad jie sudėtiniai. *Užuomina.* Vienam iš skaičių pritaikykite 4 pavyzdžio idėjas.
- Nustatykite visas galimas pirmines $|f(n)|$ reikšmes, kai skaičius n sveikasis ir $f(n) = n^3 - n^2 - 7n + 3$. *Užuomina.* Atspėkite daugianario $f(n)$ sveikąją šaknį.
- Skaičius n sveikasis. Nustatykite visas galimas pirmines $|f(n)|$ reikšmes ir visas atitinkamas n reikšmes, kai a) $f(n) = 100 \dots 0729$, čia tarp 1 ir 7 yra $6n - 3$ nulių, $n \geq 1$; b) $f(n) = n^4 + n^3 - 6$.
- Raskite natūraliuosius k ir l , mažesnius už 929, kuriems $350k$ dalijasi iš (pirminio) skaičiaus 929 su liekana 1, o $350l$ – su liekana 79.
- Nagrinėkime aritmetinę progresiją 1, 7, 13,
a) Įrodykite, kad joje yra be galo daug narių, turinčių daugiau nei 6 teigiamus daliklius.
b) Nustatykite, kiek daugiausiai šioje progresijoje yra iš eilės einančių narių, kurie yra pirminiai skaičiai.
- Nesinaudodami Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas, įrodykite: aritmetinėje progresijoje 5, 11, 17, ... yra be galo daug pirminių skaičių.
- Natūraliojo skaičiaus n SPD yra $5^{500} \cdot p^2$ (čia skaičius $p \neq 5$ pirminis). Įrodykite, kad yra be galo daug p reikšmių, kurioms skaičiaus n visų teigiamų daliklių suma dalijasi iš 7, ir raskite 9-ąją mažiausią tokią reikšmę.
- Natūralusis skaičius m vadinamas **tobulu**, jei jo visų teigiamų daliklių, išskyrus patį m , suma $s(m)$ lygi m . Pavyzdžiui, skaičius $m = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ yra tobulas. Nagrinėkime skaičius $n = 2^a \cdot p$, kur skaičius a natūralusis, o skaičius $p > 2$ pirminis. Nustatykite ketvirtąjį mažiausią tokių skaičių n , kuris yra tobulas. *Užuomina.* Užrašykite $n = 2^a \cdot p$ teigiamų daliklių sumos $s(n) + n$ formulę. Pritaikykite ją atveju, kai n tobulas.

III. LYGTYS IR NELYGYBĖS SU PARAMETRAIS

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Jei sumąstytume, pavyzdžiui, ištirti, kaip išsidėsto plokštumoje parabolė

$$y = x^2 + 2x + q, \quad q \in (-\infty; +\infty),$$

ir tiesės $y = kx$, $k > 0$, susikirtimo taškai $(x; y)$, aišku, pirmiausia turėtume išspręsti kvadratinę lygtį

$$x^2 + 2x + q = kx \tag{1}$$

su nežinomu x ir dviem parametrais q ir k . Ir visai suprantama, kad tie parametrai yra tiesiog kintamieji dydžiai, kurių reikšmės yra realieji skaičiai. Bet ieškant (1) lygties sprendinių svarbu neužmiršti, kad q gali įgyti bet kurią realiąją reikmę, o k – tik teigiamą.

Na, o (1) lygtį visai nesunku išspręsti, nes ji ekvivalenti lygčiai

$$x^2 + (2-k)x + q = 0.$$

Gautume, kad

$$x = \frac{k-2 \pm \sqrt{(k-2)^2 - 4q}}{2}, \quad q \in (-\infty; +\infty), \quad k > 0.$$

Štai čia ir turėtų prasidėti tikrasis tyrėjo darbas.

Drauge apsvarstykime tik vieną atvejį. Pasirinkę $k = 2$, gautume, kad

$$x = \pm\sqrt{-q},$$

ir tai reikštų, jog esant $q > 0$ parabolė $y = x^2 + 2x + q$ nesusikerta su tiese $y = 2x$. Jei $q = 0$, tai gautume vieną bendrą (parabolės ir tiesės) tašką $(0; 0)$. O esant sąlygai $q < 0$ gautume du parabolės ir tiesės $y = 2x$ susikirtimo taškus: $(-\sqrt{-q}; -2\sqrt{-q})$ ir $(\sqrt{-q}; 2\sqrt{-q})$.

Kad pasidarytų dar suprantamiau, galėtume toje pačioje koordinačių sistemoje nubrėžti tiesę $y = 2x$ bei kelias paraboles $y = x^2 + 2x + q$ ir atidžiai išsižiūrėti į gautą vaizdą.

Kiti pavyzdžiai

1 pavyzdys. Raskime visas parametro a , $a > 0$, reikšmes, kurioms esant parabolės $y = (x-2)^2$ ir $y = ax^2$ susikerta dviejuose taškuose.

Sprendimas. Aišku, kad susikirtimo taškuose $(x; y)$ turi galioti lygybė

$$(x-2)^2 = ax^2, \quad a > 0.$$

Ją nagrinėkime taip:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 = ax^2 &\Rightarrow (x-2)^2 - ax^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (\sqrt{a} \cdot x)^2 = 0 \Rightarrow (x-2-\sqrt{a} \cdot x)(x-2+\sqrt{a} \cdot x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((1-\sqrt{a})x-2)((1+\sqrt{a})x-2) = 0 \Rightarrow (1-\sqrt{a})x = 2 \quad \text{arba} \quad (1+\sqrt{a})x = 2. \end{aligned}$$

Lygtis $(1-\sqrt{a})x = 2$ neturi sprendinių, jei $a = 1$, o esant sąlygai $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ ji turi vieną sprendinį $x = \frac{2}{1-\sqrt{a}} = \frac{2(1+\sqrt{a})}{1-a}$. Lygtis $(1+\sqrt{a})x = 2$ turi vieną sprendinį $x = \frac{2}{1+\sqrt{a}}$.

Taigi abi parabolės susikerta viename taške, jei $a = 1$; šio taško koordinatės $(1; 1)$.

Jei $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, abi parabolės susikerta dviejuose taškuose; jų abscisės yra atitinkamai

$$x = \frac{2}{1-\sqrt{a}} \quad \text{ir} \quad x = \frac{2}{1+\sqrt{a}}.$$

Ats.: $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2 pavyzdys. Raskime nelygybės

$$x^3 + 2(a+1)x^2 + (a^2 - 4)x + 2 < 0 \tag{2}$$

sprendinių aibę, jei $x = -a$ yra lygties $x^3 + 2(a+1)x^2 + (a^2 - 4)x + 2 = 0$ sprendinys.

Sprendimas. Įrašykime $x = -a$ į lygtį ir raskime parametro a reikšmes, kurioms esant $x = -a$ yra lygties sprendinys:

$$\begin{aligned} (-a)^3 + 2(a+1)(-a)^2 + (a^2 - 4)(-a) + 2 &= 0 \Rightarrow -a^3 + 2a^3 + 2a^2 - a^3 + 4a + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a^2 + 4a + 2 &= 0 \Rightarrow 2(a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Vadinasi, $x = 1$ yra lygties $x^3 - 3x + 2 = 0$ sprendinys, o sprendžiama nelygybė yra

$$x^3 - 3x + 2 < 0. \quad (3)$$

Ieškodami šios nelygybės sprendinių aibės, pabandykime daugianarį $x^3 - 3x + 2$ išskaidyti dvinarių sandauga:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= (x^3 - x) - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) - 2) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)((x^2 - 1) + (x - 1)) = (x - 1)^2(x + 1 + 1) = (x - 1)^2(x + 2). \end{aligned}$$

Vadinasi, (3) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$(x - 1)^2(x + 2) < 0.$$

O ji galioja tik kai $x + 2 < 0$, taigi tik kai $x < -2$.

Belieka padaryti išvadą, kad (2) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; -2)$.

Ats.: $(-\infty; -2)$.

3 pavyzdys. Raskime visas realiųjų skaičių p ir q poras $(p; q)$, kurioms esant kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniai yra p ir q ; $p \neq q$.

Sprendimas. Pagal Vijeto teoremą $p + q = -p$ ir $p \cdot q = q$. Iš čia gauname:

$$\begin{cases} q = -2p, \\ q(p - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -2p, \\ -2p(p - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0 \text{ ir } q = 0 \text{ arba } p = 1 \text{ ir } q = -2.$$

Kadangi (pagal sąlygą) $p \neq q$, tai $p = 1$, $q = -2$.

Gauname tik vieną parametru p ir q porą $(1; -2)$, kuri tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: $(1; -2)$.

4 pavyzdys. Raskime parametro p reikšmes, kurioms esant kvadratinės lygties

$$x^2 + (2p - 1)x + p^2 = 0$$

abu sprendiniai yra didesni už 1.

Sprendimas. Kad lygtis turėtų du sprendinius, jos diskriminantas $D = (2p - 1)^2 - 4p^2 = 1 - 4p$ turi būti teigiamas skaičius. Todėl $p < \frac{1}{4}$.

Tegu x_1 ir x_2 yra lygties sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = 1 - 2p$ ir $x_1 \cdot x_2 = p^2$.

Pagal sąlygą, $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$. Todėl

$$x_1 + x_2 > 2 \text{ ir } x_1 \cdot x_2 > 1 \Rightarrow 1 - 2p > 2 \text{ ir } p^2 > 1 \Rightarrow p < -\frac{1}{2} \text{ ir } |p| > 1 \Rightarrow p < -1.$$

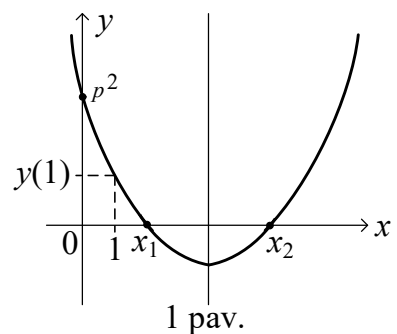
Pagal atliktą analizę galima padaryti (bent jau tarpinę!) išvadą, kad turi būti $p < -1$.

Vis dėlto neskubėkime su galutine išvada, nes iš nelygybių $x_1 + x_2 > 2$ ir $x_1 \cdot x_2 > 1$ nebūtinai išplaukia, kad $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad parabolės

$$y = x^2 + (2p - 1)x + p^2$$

šakos kyla į viršų (žr. 1 pav.). Todėl (esant sąlygai $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$) turi būti $y(1) > 0$; čia $y(1)$ yra kvadratinio trinario reikšmė, kai $x = 1$.



Iš nelygybės $y(1) > 0$ gauname:

$$1 + (2p - 1) \cdot 1 + p^2 > 0 \Rightarrow 2p + p^2 > 0 \Rightarrow p(2 + p) > 0 \Rightarrow p < -2 \text{ arba } p > 0.$$

Sugretinę su nelygybe $p < -1$, gauname galutinį atsakymą: $p < -2$.

Ats.: $p < -2$.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visas parametro a reikšmes, kurioms esant vienas kvadratinės lygties

$$(a - 1)x^2 - 4ax + 4(a + 1) = 0, \quad a \neq 1,$$

sprendinys yra neigiamas, o kitas – didesnis už 1.

2. Raskite mažiausią kvadratinio trinario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmę, jei kvadratinės lygties $x^2 + bx + c = 0$ sprendinių skirtumas lygus 7.

3. Nustatykite, kuriai parametro a reikšmei esant kvadratinio trinario $x^2 + ax - 1 - a$ šaknų (kvadratinės lygties $x^2 + ax - 1 - a = 0$ sprendinių) kvadratų suma yra pati mažiausia.

Pastaba. Kai diskriminantas lygus nuliui, kvadratinis trinaris turi dvi lygias šaknis, o kvadratinė lygtis – vieną sprendinį.

4. Raskite visas sveikąsias parametro m reikšmes, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + 5mx + 84 = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

5. Raskite parametrų p ir q reikšmių poras $(p; q)$, $p + q = 16$, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + px + q = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

6. Raskite visas parametro a reikšmes, kurioms esant lygtys

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{ir} \quad x - y = a$$

turi tik vieną bendrą sprendinį (realiųjų skaičių porą $(x; y)$, kuri tenkina ir pirmą, ir antrą lygtį).

7. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybės

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

sprendinių nėra nei intervale $(-\infty; -1)$, nei intervale $(1; +\infty)$.

8. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybės

$$ax^2 + (a - 1)x + a - 1 < 0, \quad a \neq 0,$$

sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

9. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybė $y \geq x^2 + a$ turi vienintelį sprendinį $(x; y)$, jei $x \geq y^2 + a$.

10. Raskite parametrų m ir n reikšmes, kurioms esant $x = 2$ ir $x = 3$ yra lygties $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ sprendiniai. Taip pat raskite trečią šios lygties sprendinį.

IV. DAR KARTĄ APIE TRIKAMPĮ

Teorinę medžiagą parengė ir ketvirtąjį užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Trikampis – pati paprasčiausia plokštumos geometrinė figūra, apie trikampius mokytis pradėdame nuo pirmųjų geometrijos pamokų ir jų savybes nagrinėjame kiekvienoje klasėje. Atrodo, kad apie trikampius žinome labai daug, bet ši užduotis supažindins Jus su dar nežinomais trikampio geometrijos faktais.

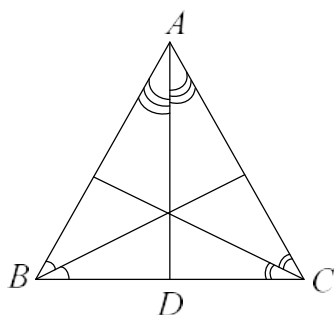
Primename keletą trikampio ir jo elementų savybių, kurias sužinojote matematikos pamokose.

1) Trikampio kampų suma lygi 180° ; trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio kampų sumai.

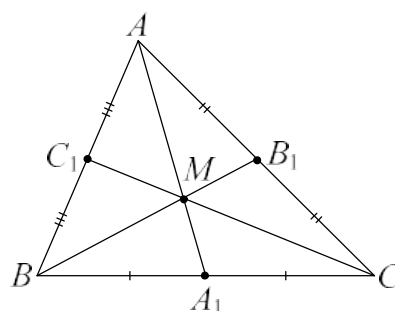
2) Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs, aukštinė nubrėžta į jo pagrindą yra ir trikampio pusiaukampinė, ir trikampio pusiaukraštinė.

3) Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi 90° ; įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

4) Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške, kuris yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras. Trikampio pusiaukampinė dalija kraštinę į dalis, proporcingas prie jų esančioms trikampio kraštinėms: jei atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė, tai $BD : DC = AB : AC$ (1 pav.).



1 pav.



2 pav.

5) Trikampio pusiaukraštinės AA_1 , BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške M ir $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$ (2 pav.).

6) Trikampio aukštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio *ortocentru*.

7) Apie trikampį apibrėžiamas apskritimas, kurio centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų sankirtos taškas; apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

8) Trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškus M ir N jungianti atkarpa vadinama trikampio *vidurine linija*, ji yra lygiagreti atkarpai BC ir lygi jos pusei.

9) Trikampių lygumo požymiai:

9a) trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra lygūs, jei lygios jų atitinkamos kraštinės $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ir jų sudaromi kampai $\angle BAC = \angle B'A'C'$;

9b) trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra lygūs, jei lygios jų atitinkamos kraštinės $AB = A'B'$ ir prie jų esantys kampai $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle CBA = \angle C'B'A'$;

9c) trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra lygūs, jei lygios jų atitinkamos kraštinės $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ir $BC = B'C'$,

Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašieji, jei jų atitinkami kampai lygūs, o prieš juos esančios kraštinės proporcingos: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Trikampių panašumo požymiai yra šie:

10a) trikampiai panašieji, jei vieno jų du kampai lygūs atitinkamiems kito trikampio dviem kampams: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

10b) trikampiai panašieji, jei vieno jų kampas lygus atitinkamam kito trikampio kampui, o kraštinės, sudarančios tuos kampus, yra proporcingos: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\angle A = \angle A'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

10c) trikampiai panašieji, jei jų atitinkamos kraštinės proporcingos: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Priminsime svarbiausias trikampio metrinės priklausomybes.

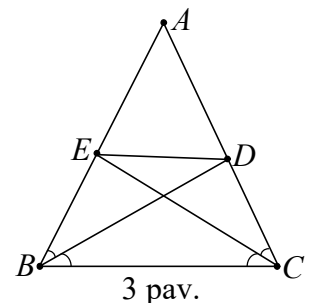
11) Trikampiai ABC teisinga lygybė $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle C$ (kosinų teorema).

12) Jei R – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, tai $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$ (sinusų teorema).

13) Trikampio ABC plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugos pusei: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Be to, skaičiuojant trikampio plotą dažnai taikomos lygybės $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, čia $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – trikampio pusperimetris.

1 pavyzdys. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus b . Nubrėžtos trikampio kampų prie pagrindo pusiau kampinės, o atkarpa tarp pusiau kampinių ir šoninių kraštinių sankirtos taškų lygi m . Rasime trikampio pagrindo ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC šoninės kraštinės $AB = AC = b$, atkarpos BD ir CE yra kampų prie pagrindo pusiau kampinės, o $DE = m$ (3 pav.). Iš trikampių BEC ir CDB lygumo išplaukia, kad $BE = CD$, taigi ir $AE = AD$, todėl trikampis ADE yra lygiašonis ir panašus į duotąjį trikampį. Iš panašumo gauname, kad $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$, taigi $BC = \frac{AB \cdot ED}{AE}$. Kita vertus iš trikampio pusiau kampinių savybės (4 teiginys) išplaukia lygybė $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$, todėl $BC = \frac{EB \cdot AC}{AE} = \frac{(AB-AE)AC}{AE}$. Sulyginę gautąsias BC išraiškas ir įrašę sąlygoje duotus atkarpų ilgius, gauname lygybę $bm = (b - AE)b$, iš kurios randame, kad $AE = b - m$. Taigi $BC = \frac{bm}{b-m}$.

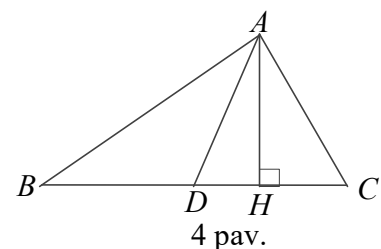


Sakykime, kad trikampio ABC kraštinių ilgiu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, o kraštinėje BC yra taškas D , kuris dalija šią kraštinę į atkarpas $BD = m$, $DC = n$. Rasime atkarpos AD ilgį d (4 pav.).

Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę $AH = h$. Taikydami trikampiams ABH , ADH ir ACH Pitagoro teoremą, gauname, kad $AB^2 = AH^2 + HB^2$, $AD^2 = DH^2 + HA^2$, $AC^2 = CH^2 + AH^2$. Pažymėkime $HD = p$, tuomet $c^2 = h^2 + (m+p)^2$ ir $h^2 = d^2 - p^2$. Iš čia seka, kad

$$c^2 = d^2 - p^2 + (m+p)^2 = d^2 + m^2 + 2pm.$$

Kadangi $CH = n - p$, tai iš lygybės $AC^2 = AH^2 + CH^2$ seka, kad $b^2 = d^2 - p^2 + (n-p)^2 = d^2 + n^2 - 2np$. Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $c^2 n = d^2 n + nm^2 + 2pmn$ ir $b^2 m = d^2 m + n^2 m -$



$2mnp$. Sudėję šias lygybes, gauname, kad $c^2n + b^2m = d^2(m + n) + mn(m + n)$. Kadangi $m + n = a$, tai iš čia išplaukia, kad $d^2 = \frac{c^2n + b^2m - amn}{a}$. Taigi gavome atkarpos AD ilgio formulę

$$d = \sqrt{\frac{c^2n + b^2m - amn}{a}} \quad (1)$$

Gautoji formulė yra vadinama *Stiuarto formule* (Mathew Stewart (1717–1785) – škotų matematikas)

Atskiri šios formulės atvejai yra trikampio pusiauakraštinių ir pusiauakampinių ilgio formulės. Jei atkarpa AD yra trikampio ABC pusiauakraštinė, tai $BD = DC = \frac{a}{2}$, taigi gauname tokią pusiauakraštinės ilgio formulę

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \quad (2)$$

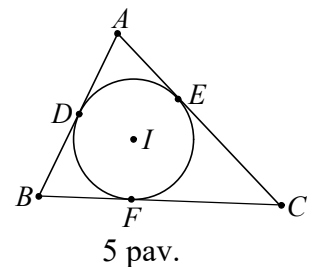
Pagal trikampio pusiauakampinės savybę, pusiauakampinė AD dalija trikampio kraštinę BC į dalis, kurių santykis lygus $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Iš lygybių $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, $m + n = a$ randame, kad $m = \frac{ac}{b+c}$, $n = \frac{ab}{b+c}$. Įrašę šias reikšmes į (1) lygybę ir atlikę veiksmus gauname, kad

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{\frac{c^2ab^2 + c^3ab + b^3ac + b^2ac^2 - a^3bc}{a(b+c)^2}} = \sqrt{\frac{abc(b^2 + c^2 + 2bc - a^2)}{a(b+c)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}. \end{aligned}$$

Taigi trikampio pusiauakampinės ilgis skaičiuojamas pagal formulę

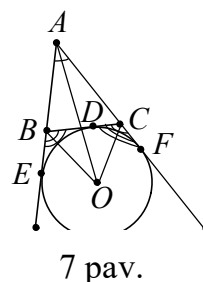
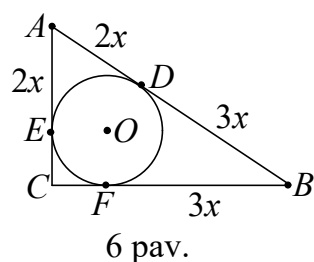
$$AD = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}.$$

Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas trikampio kraštines AB, AC, BC liečia atitinkamai taškuose D, E, F (5 pav.). Pagal apskritimų liestinių iš vieno taško savybes gauname, kad $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$. Jei p yra trikampio ABC pusperimetris, tai iš lygybės $AB + AC + BC = 2p$ išplaukia lygybė $2AD + 2BF + 2CE = 2p$, taigi $AD + BF + CE = p$. Kadangi $BF + CE = BF + FC = BC$, tai $AD = AE = p - BC = p - a$. Analogiškai gaunamos ir lygybės $BD = BF = p - b$, $CE = CF = p - c$.



2 pavyzdys. Įbrėžtas į statųjį trikampį apskritimas liečia įžambinę taške, kuris dalija įžambinę santykiu 2 : 3, trikampio perimetras lygus 36. Rasime trikampio kraštinių ilgius.

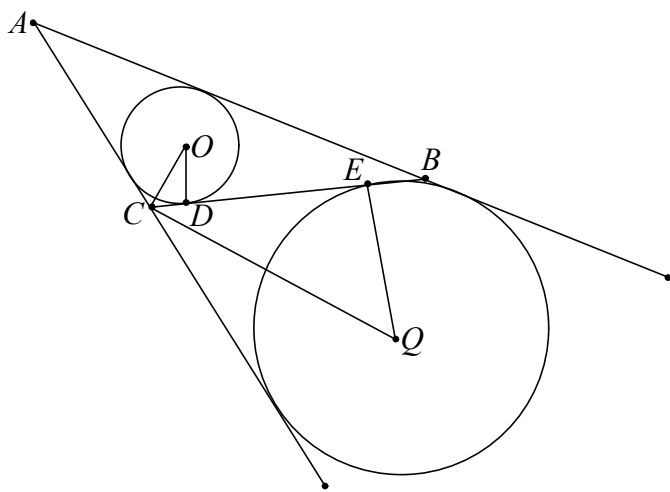
Sprendimas. Sakykime, kad į statųjį trikampį ABC įbrėžtas apskritimas įžambinę AB liečia taške D , o statinius AC ir BC – taškuose E ir F (6 pav.). Žymėkime $AD = AE = 2x$, $BD = BF = 3x$, tuomet $AB = 5x$, $CE = CF = p - AB = 18 - 5x$, $AC = AE + CE = 18 - 3x$, $BC = BF + FC = 18 - 2x$. Iš Pitagoro teoremos išplaukia lygybė $(18 - 3x)^2 + (18 - 2x)^2 = (5x)^2$. Pertvarkę gauname lygtį $x^2 + 15x - 54 = 0$, kurios teigiamoji šaknis yra $x = 3$. Taigi $AB = 15$, $AC = 9$, $BC = 12$.



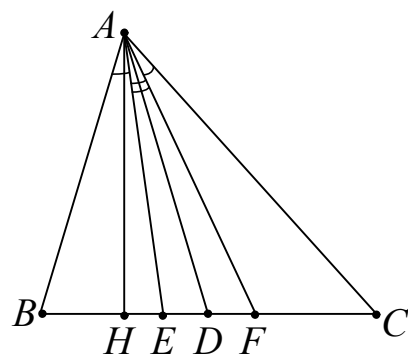
Apskritimas, kuris liečia vieną trikampio kraštinę ir kitų dviejų kraštinių tęsinius, yra vadinamas trikampio *pribrėžtiniu apskritimu*. Šio apskritimo centras yra vieno trikampio kampo pusiaukampinės ir kampų, gretutinių kitiems trikampio kampams pusiaukampinių sankirtos taškas. 7 pav. nubrėžto apskritimo, kuris liečia kraštinę BC taške D , kraštinės AB tęsinį – taške E , o kraštinės AC tęsinį – taške F , centras O yra trikampio kampo A pusiaukampinės ir kampų CBE bei BCF pusiaukampinių sankirtos taškas. Pagal iš vieno taško nubrėžtų apskritimo liestinių savybes $BD = BE$, $CD = CF$, $AE = AF$. Akivaizdu, kad $AE = AB + BE$, $AF = AC + CF$, todėl $AE + AF = 2AE = AB + AC + (BD + CD) = AB + AC + BC = 2p$. Iš čia išplaukia, kad atkarpų AE ir AF ilgiai lygūs trikampio ABC pusperimetriui.

3 pavyzdys. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas kraštinę BC liečia taške D , šio apskritimo spindulys lygus 3. Apskritimas, kurio spindulys lygus 4, taške E liečia kraštinę BC ir kraštinių AB bei AC tęsinius. Rasime atstumą DE , jei trikampio ABC kampas C lygus 120° .

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras, o taškas Q yra pribrėžtinio apskritimo, liečiančio kraštinę BC ir kitų trikampio kraštinių tęsinius, centras (8 pav.). Kadangi OC yra kampo ACB pusiaukampinė, tai $\angle OCB = 60^\circ$. Iš stačiojo trikampio OCD randame, kad $\frac{OD}{CD} = \operatorname{tg} \angle OCD = \operatorname{tg} 60^\circ$, todėl $CD = \frac{OD}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Kadangi $\angle QCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 30^\circ$, tai iš stačiojo trikampio QCE išplaukia, kad $\frac{QE}{CE} = \operatorname{tg} \angle QCB$, todėl $CE = \frac{QE}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{3}$. Taigi $DE = CE - CD = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.



8 pav.



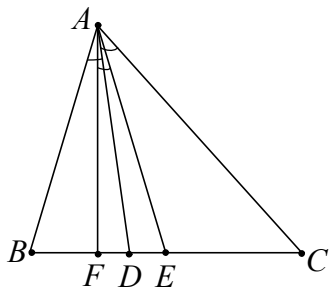
9 pav.

Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė, o kraštinėje BC yra taškai E ir F , be to, tiesėje AD yra kampo EAF pusiaukampinė (9 pav.), tai atkarpos AE ir AF vadinamos jungtinėmis. Aišku, kad jungtinės atkarpos sudaro vienodus kampus su trikampio pusiaukampine $\angle EAD = \angle FAD$, o taip pat ir su trikampio kraštinėmis $\angle BAE = \angle CAF$. Jei atkarpos AE ir AF yra jungtinės, tai $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{c^2}{b^2}$. Įrodysime šią lygybę. Jei trikampio ABC aukštinė $AH = h$, tai dviem būdais skaičiuodami trikampio BAE plotą, turime lygybę $BE \cdot h = AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE$. Analogiškai dviem būdais skaičiuodami trikampio CAF plotą, gauname, kad $CF \cdot h = AC \cdot AF \cdot \sin \angle CAF$. Kadangi $\angle BAE = \angle CAF$, tai iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AF}$. Analogiškai skaičiuodami

trikampių ABF ir ACE plotus, gauname lygybes $BF \cdot h = AB \cdot AF \cdot \sin \angle BAF$ ir $CE \cdot h = AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE$. Kadangi $\angle BAF = \angle CAE$, tai iš čia turime lygybę $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AF}{AE}$. Taigi

$$\frac{BE}{CF} \cdot \frac{BF}{EC} = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AF}{AE} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Atkarpa, kuri yra jungtinė su trikampio pusiauakraštine, vadinama *trikampio simediana*. Jei atkarpa AE yra trikampio ABC pusiauakraštinė, o atkarpa AF – jo simediana (10 pav.), tai $BE = EC$, taigi iš ką tik įrodytos lygybės seka, kad $\frac{BF}{FC} = \frac{c^2}{b^2}$.

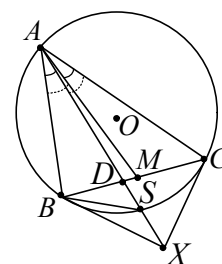


10 pav.

4 pavyzdys. Sakykime, kad taške X susikerta apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinės, nubrėžtos taškuose B ir C (11 pav.), tiesė AX kerta trikampio kraštinę BC taške D . Įrodysime, kad atkarpa AD yra trikampio simediana.

Sprendimas. Sakykime, kad apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinės, nubrėžtos taškuose B ir C , susikerta taške X , tiesė AX kerta trikampio kraštinę BC taške D , o apskritimą – taške S . Sakykime, kad kraštinės BC taškas M yra toks, kad atkarpos AD ir AM yra jungtinės, t. y. $\angle BAD = \angle CAM$, o $\angle BAM = \angle CAD$.

Taikydami sinusų teoremą trikampiams BAM ir CAM gauname, kad $\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$, $\frac{CM}{\sin \angle CAM} = \frac{AC}{\sin \angle AMC}$, t. y. $BM = \frac{c \sin \angle BAM}{\sin \angle AMB}$, $CM = \frac{b \sin \angle BAM}{\sin \angle AMC}$. Kadangi $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$, tai $\sin \angle AMB = \sin \angle AMC$, todėl



11 pav.

$\frac{BM}{CM} = \frac{c \sin \angle BAM}{b \sin \angle CAM} = \frac{c \sin \angle CAX}{b \sin \angle BAX}$. Jei R – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, tai pagal

sinusų teoremą $\sin \angle CAX = \sin \angle CAS = \frac{CS}{2R}$, $\sin \angle BAX = \sin \angle BAS = \frac{BS}{2R}$, taigi $\frac{BM}{CM} = \frac{c \cdot CS}{b \cdot BS}$. Pagal

kampo tarp liestinės ir stygos savybę $\angle XBS = \angle ABS$, todėl trikampiai ABX ir BSX yra panašieji, t. y. $\frac{AB}{BS} = \frac{AX}{BX}$. Iš čia gauname, kad $BS = \frac{AB \cdot BX}{AX}$. Analogiškai $\angle SCX = \angle CBS$, trikampiai CAX ir SCX yra panašieji, todėl $\frac{CA}{SC} = \frac{AX}{CX}$, taigi $CS = \frac{CA \cdot CX}{AX}$. Kadangi pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno

taško, savybes $BX = CX$, tai $\frac{BM}{CM} = \frac{c \cdot CS}{b \cdot BS} = \frac{c \cdot CA}{b \cdot CB} = 1$. Iš čia seka, kad taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas, taigi atkarpa AD yra jungtinė pusiauakraštinei AM , todėl ji yra simediana.

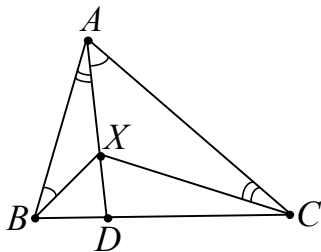
Jei trikampio kampas A statusis, tai liestinės taškuose B ir C yra lygiagrečios, todėl taškas X neegzistuoja. Tuomet simediana yra trikampio aukštinė AH , nes iš trikampių ABH ir CAH turime

$$\frac{BH}{CH} = \frac{AH \operatorname{ctg} \angle B}{AH \operatorname{ctg} \angle C} = \frac{\operatorname{ctg} \angle B}{\operatorname{ctg} \angle C} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

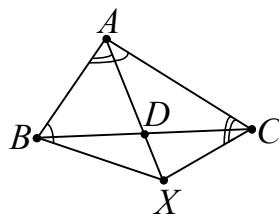
5 pavyzdys. Trikampis ABC yra smailusis, taškas X yra toks, kad $\angle ABX = \angle CAX$ ir $\angle ACX = \angle BAX$. Įrodysime, kad tiesė AX yra trikampio simediana.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas X yra trikampio ABC viduje o tiesė AX kerta trikampio kraštinę BC taške D (12 pav.). Iš trikampio priekampio savybių seka, kad $\angle BXD = \angle CXD$, t. y., tiesė

XD yra kampo BXC pusiaukampinė. Iš trikampio pusiaukampinės savybės gauname, kad $\frac{BD}{DC} = \frac{BX}{CX}$. Iš trikampių ABX ir CAX panašumo turime santykius $\frac{BX}{AB} = \frac{AX}{AC}$ ir $\frac{CX}{CA} = \frac{AX}{AB}$, iš kurių gauname, kad $\frac{BD}{DC} = \frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{AC^2}$, t. y., atkarpa AD yra trikampio simediana. Analogiškai įrodome ir tuo atveju, kai taškas X yra trikampio išorėje (13 pav.).



12 pav.



13 pav.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Lygiašonio trikampio ABC $AB = AC = 18$, $BC = 12$, atkarpos BD ir CE yra trikampio ABC aukštinės. Raskite atkarpos DE ilgį.
2. Trikampio kraštinių ilgiai $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$, jo pusiaukampinės AD ir BE susikerta taške M . Raskite atkarpų AM ir MD ilgius.
3. Trikampio ABC kraštinės AB ilgis lygus 2, pusiaukraštinės BD ilgis lygus 1, kampo BDA didumas lygus 30° . Raskite trikampio ABC plotą.
4. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas liečia vieną statinį taške, kuris dalija tą statinį į atkarpas, kurių ilgiai lygūs 6 ir 10. Raskite trikampio ABC plotą.
5. Stačiojo trikampio statinių ilgiai lygūs 5 ir 12. Raskite atstumą tarp į trikampį įbrėžto ir apie trikampį apibrėžto apskritimų centrų.
6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 7$, $AC = 9$, $BC = 12$. Apskritimas liečia trikampio kraštinę BC taške D , kraštinės AB tęsinį – taške E , o kraštinės AC tęsinį – taške F . Raskite atkarpų EF ir ED ilgius.
7. Į trikampį ABC , kurio kraštinių ilgiai $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 6$, įbrėžtas apskritimas. To apskritimo liestinė kerta kraštinę AB taške K , o kraštinę AC – taške L . Raskite trikampio AKL perimetrą.
8. Trikampis ABC lygiašonis ($AB = BC$), atkarpos AA' ir BB' jo pusiaukampinės. Raskite trikampio kampus, jei $AB' = BA'$.
9. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo liestinės taškuose B ir C susikerta taške E , tiesės BC ir AE kertasi taške D . Raskite atkarpų BD ir CD ilgius, jei $AB = 16$, $AC = 12$, $BC = 15$.
10. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$. Vienas apskritimas eina per taškus A ir B ir taške A liečia tiesę AC , kitas apskritimas eina per taškus A ir C ir taške A liečia tiesę AB . Tų apskritimų bendra styga kerta kraštinę BC taške D . Raskite santykį $BD : DC$.

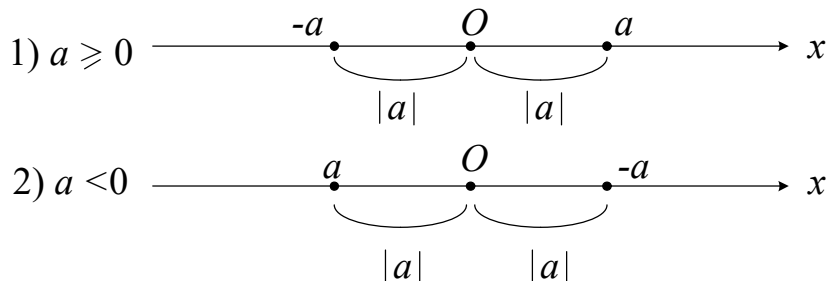
V. SKAIČIAUS MODULIS

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Realiojo skaičiaus, sakykim, a *modulis* (žym. $|a|$) nusakomas formule

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jei } a \geq 0; \\ -a, & \text{jei } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Paprastiausia šios sąvokos *interpretacija* yra skaičių tiesės taško a atstumas nuo pradžios taško O (žr. 1 pav.).

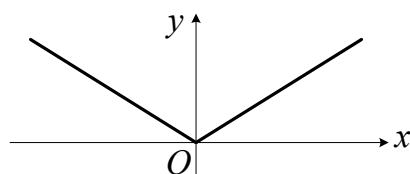


1 pav.

Bet kurio reiškinių $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *modulis* $|f(x)|$ apibrėžiamas analogiškai:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jei } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{jei } f(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Tikėtina, kad funkcijos $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas (žr. 2 pav.) yra jau gerai pažįstamas, todėl iš karto pereikime prie kitokių pavyzdžių.



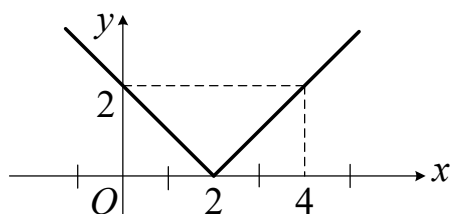
2 pav.

1 pavyzdys. Nubrėškime funkcijos $y = |2 - x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

Sprendimas. Pagal reiškinių modulio apibrėžimą (žr. (2)),

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, & \text{jei } 2 - x \geq 0; \\ x - 2, & \text{jei } 2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x, & \text{jei } x \leq 2; \\ x - 2, & \text{jei } x > 2. \end{cases}$$

Vadinasi, funkcijos $y = |2 - x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas yra laužtė (žr. 3 pav.), sudaryta iš dviejų spindulių (pustiesių): $y = 2 - x$, $x \in (-\infty; 2]$, ir $y = x - 2$, $x \in (2; +\infty)$.



3 pav.

2 pavyzdys. Nubrėškime funkcijos $y = |x| + |x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

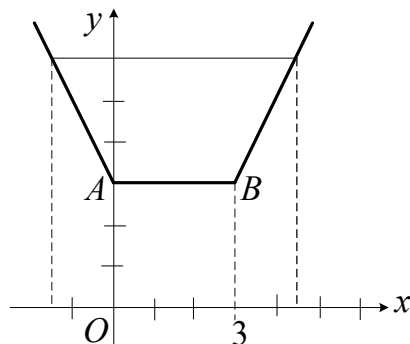
Sprendimas. Kadangi

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jei } x \geq 0; \\ -x, & \text{jei } x < 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{jei } x \geq 3; \\ 3-x, & \text{jei } x < 3, \end{cases}$$

tai

$$y = |x| + |x-3| = \begin{cases} -x + (3-x), & \text{jei } x < 0; \\ x + (3-x), & \text{jei } 0 \leq x < 3; \\ x + (x-3), & \text{jei } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 3-2x, & \text{jei } x < 0; \\ 3, & \text{jei } 0 \leq x < 3; \\ 2x-3, & \text{jei } x \geq 3. \end{cases}$$

Vaizduodami šią funkciją grafiškai, gausime laužtę (žr. 4 pav.), kurią intervale $(-\infty; 0)$ sudaro spindulys $y = 3 - 2x$, intervale $[0; 3]$ – tiesės $y = 3$ atkarpa AB , o intervale $[3; +\infty)$ – spindulys $y = 2x - 3$. Taškų A ir B koordinatės yra atitinkamai $(0; 3)$ ir $(3; 3)$.



4 pav.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$|x| + |x-3| = a; \tag{3}$$

čia a yra realusis skaičius.

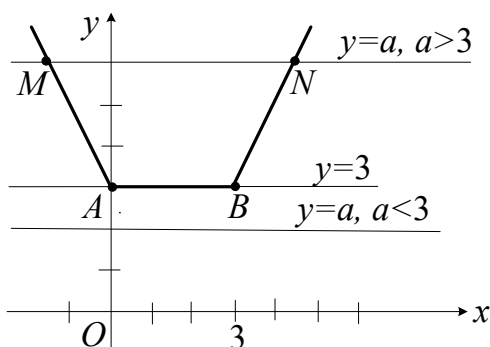
Sprendimas. Nagrinėkime funkcijų, apibrėžtų lygtimis $y = |x| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, ir $y = a$, $x \in \mathbb{R}$, sistemą

$$\begin{cases} y = |x| + |x-3|, \\ y = a; \end{cases}$$

čia a yra (bet kuris) realusis skaičius.

Funkcijos $y = |x| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas pavaizduotas 4 paveiksle (žr. 2 pvz.), o funkcijos $y = a$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas yra tiesė, lygiagreti su koordinatinių sistemos ašimi Ox (ašį Oy ji kerta taške $(0; a)$).

Pavazduokime abi šias funkcijas viename paveiksle išskirdami tris atvejus: $a < 3$, $a = 3$ ir $a > 3$ (žr. 5 pav.).



5 pav.

Lengva suvokti, kad :

- 1) lygtis neturi sprendinių, jei $a < 3$
- 2) lygties $|x| + |x-3| = 3$ sprendinių aibė yra intervalas $[0; 3]$;

3) lygtis turi du sprendinius, jei $a > 3$. Šie sprendiniai yra taškų M ir N abscisės, kurios randamos atitinkamai iš lygčių

$$3 - 2x = a \quad \text{ir} \quad 2x - 3 = a.$$

Išsprendę gauname $x = \frac{1}{2}(3-a)$ ir $x = \frac{1}{2}(3+a)$.

Ats.: 1) \emptyset , jei $a < 3$; 2) $[0; 3]$, jei $a = 3$; 3) $\frac{1}{2}(3-a)$ ir $\frac{1}{2}(3+a)$, jei $a > 3$.

4 pavyzdys. Raskime nelygybės

$$|x| + |x-3| < a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

sprendinių aibę.

Sprendimas. Atidžiai išsižiūrėję į 5 paveikslą ir lygties $|x| + |x-3| = a$ sprendimo atsakymą, gausime, kad:

1) (4) nelygybė sprendinių neturi, jei $a \leq 3$;

2) (4) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left(\frac{1}{2}(3-a); \frac{1}{2}(3+a)\right)$, jei $a > 3$.

Ats.: 1) \emptyset , jei $a \in (-\infty; 3]$; 2) $\left(\frac{1}{2}(3-a); \frac{1}{2}(3+a)\right)$, jei $a > 3$.

Čia pat atkreipkime dėmesį ir į nelygybę $|x| + |x-3| > a$, $a \in \mathbb{R}$. Išanalizavę (pagal 5 paveikslą) gautume, kad jos sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(-\infty; +\infty)$, jei $a < 3$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}(3-a)\right) \cup \left(\frac{1}{2}(3+a); +\infty\right)$, jei $a \geq 3$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Nubrėžkite funkcijos $y = 2|x+3| - |2-x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

2. Išspręskite lygtį $2|x+3| - |2-x| = a$; čia a yra bet koks realusis skaičius.

3. Raskite nelygybės $2|x+3| - |2-x| > a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę.

4. Nubrėžkite funkcijos $y = |x-1| - |x-2| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

5. Raskite visas parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmes, kurioms esant lygtis

$$|x-1| - |x-2| + |x-3| = a$$

turi keturis sprendinius.

6. Raskite nelygybės $|x-1| - |x-2| + |x-3| < a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę.

7. Raskite funkcijų $y = a|x|$ ir $y = |x-2|$ grafikų bendrų taškų skaičiaus priklausomybę nuo parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmės.

8. Nustatykite, ar funkcija $y = |x+10| + |x-10|$, $x \in \mathbb{R}$, yra lyginė.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

10. Išspręskite lygtį

$$3\sqrt{x-3} + |x-7| = 6.$$

VI. SVĖRIMAI IR PILSTYMAI

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė doc. Romualdas Kašuba

Svėrimo ir pilstymo uždaviniai visada arba dažniausiai patinka tiems, kurie turi nors kiek daugiau laiko pagalvoti, arba kuriems tiesiog sekasi aiškiau galvoti, arba kam stačiai patinka spręsti.

Tai loginių uždavinių porūšis su gana aiškiai nusakytu tikslu ir paprastai gana aiškiomis priemonėmis – indais arba svarstyklėmis – tam tikslui pasiekti. Kaip ir kai kuriuose kituose loginiuose uždaviniuose, tikslas neretai pasiekiamas nelabai lengvai, bet paprastai suradus tinkamą sprendimą arba bent supratęs tinkamą sprendimo būdą, abejonių, ar viskas čia gerai, beveik nebelieka.

Kaip nereti kiti loginiai uždaviniai jie buvo ir yra labai paplitę ir yra žinomi kone nuo neatmenamų laikų. Daug kam patinka dar ir tai, kad tokios rūšies uždaviniams spręsti nereikia jokių specialių žinių ir neprireikia net kvadratinės lygties šaknų radimo formulių, o gana vien tik sugebėjimo nors kiek aiškiau ar logiškiau mąstyti, o tą gebėjimą, panašiai kaip ir kitus siektinus įgūdžius, geriausiai vystyti kasdienėmis nuolatinėmis pastangomis.

Vienas pačių pirmųjų paprastųjų galvosenos, susijusios su svėrimais, pavyzdžių galėtų būti susigaudymas, kas darytina tokiu atveju.

1. Turime **sugedusias** svirtines svarstyklas, didelį maišą cukraus ir 1 kilogramo svarelį. Kaip mums elgtis, jeigu mes norime (tik tiek teturėdami) at(si)sverti 1 kg cukraus?

Sprendimas. Turime ne labai daug ką ir kai mes mąstome, kaip mes galėtume pradėti, tai beveik nieko geriau negalime sugalvoti, kaip tik kad ant vienos svarstyklių lėkštutės ir dėti tą 1 kg svarelį, o ant kitos svarstyklių lėkštutės dėti ką begalėtume? Ant tos kitos svarstyklių lėkštutės sunku būtų sugalvoti ką nors geresnio kaip tik kad pilti tiek cukraus iš to didelio maišo, kad svarstyklės būtų pusiausvyroje. O ką daryti toliau? Toliau gali gana greit ateiti į galvą, kad būtų galima nuimti tą 1 kg svarelį ir į jo vietą iš to paties didelio maišo pilti tiek cukraus, kad svarstyklės vėl būtų pusiausvyroje. Taip mes ir atsisvertume (dviem veiksmiais) tą norimą 1 kg cukraus.

2. Maišelyje yra 9 kilogramai razinų. Kaip turėdami svirtines svarstyklas (su lėkštutėmis) ir vieną 200 gramų masės svarelį mes galėtume trimis svėrimais atsisverti lygiai 2 kg razinų?

Sprendimas. Jeigu nebijotume arba galėtume ilgai svėrinėti, tai atsakymas galėtų būti toks: atsverkime 10 kartų po 200 gramų razinų ir taip darydami (pamažu) ir susirinksime tuos 2000 gramų – o tai ir yra tie trokštami 2 kilogramai. Užtektų 10 mažų „pasvėrinėjimų“. Kaip sakoma, lašas po lašo ir akmenį pratašo (arba du kilogramus razinų pasveria).

Tačiau jeigu norėtume kiek greičiau, arba trimis svėrimais, tai galėtume elgtis taip: pirmu veiksmu padedame kurioje nors pusėje tą svarelį, o visas razinas išpilstome per abi lėkšteles taip, kad svarstyklės būtų „pusiausviro“; tada vienoje pusėje (ten kur svarelis) bus 4 kilogramai ir 400 gramų, o kitoje – 4 kilogramai 600 gramų razinų.

Nupilkime kur nors tuos 4 kilogramus su 400 gramų ir pasilikime tą pusę su 4 kilogramais 600 gramų. Juos išdalinkime (tai jau antrasis veiksmas), kad jie būtų per abi lėkštutes vėl pusiausvyroje kartu su 200 gramų svareliu vienoje kurioje nors pusėje. Po antrojo veiksmo bus atsverta vienoje vietoje 2 kilogramai 200 gramų, o kitoje – 2 kilogramai 400 gramų razinų. Trečiuoju veiksmu iš tos krūvos, kurioje yra 2 kilogramai 200 gramų reikia paimti tiek razinų, kurios atsvertų kitoje svarstyklių pusėje esantį vienišą 200 gramų svarelį. Tai padarius ten, kur ką tik buvo 2 kilogramai 200 gramų razinų, jų ten bus likę lygiai 2 kilogramai.

Tai ir yra tai, ko mums reikia.

Atsakymas. 2 kilogramus razinų tikrai galima atsverti trimis svėrimais.

3. Jonas, Andrius ir Justinas nori trimis sunkvežimiais pervežti 7 pilnas statines, 7 statines pripiltas iki pusės ir dar 7 tuščias statines, kad visuose sunkvežimiuose būtų vienodos masės kroviny. Pastebėsime, kad visos tuščios statinės yra vienodos formos ir vienodos masės.

Sprendimas. Jonas į savo sunkvežimą galėtų krauti 3 pilnas statines, vieną pripiltą iki pusės ir pridėti dar 3 visai tuščias statines, Andrius galėtų atkartoti Jono veiksmus, tai yra, į savo sunkvežimą krauti irgi 3 pilnas statines, ketvirtą pusiau pilną ir dar pridėti 3 tuščias statines, na o Justinas į savo sunkvežimą susikrautų tai, kas dar ten liko nesukrauta. O liko nesukrauta 1 pilna statinė, 5 pripiltos iki pusės ir dar 1 tuščia statinė. Nesunku susekti, kad visuose sunkvežimiuose esantis kroviny yra tikrai vienodos masės.

4. Zuikis (Z) yra 3 kilogramais sunkesnis už triušį (T). Kiek sveria vienas toks zuikis, jeigu 2 tokie patys zuikiai sveria tiek pat, kiek ir 5 tokie patys triušiai? Kiek sveria vienas toks triušis?

Sprendimas. Tai, kas pasakyta sąlygoje, galima užrašyti taip:

$$Z = T + 3 \quad \text{ir} \quad 2Z = 5T.$$

Tada 2 zuikiai sveria tiek pat kiek 2 triušiai ir dar 6 kilogramai arba iš kitos lygybės, tiek pat, kiek ir 5 triušiai. Taigi 2 triušiai ir dar 6 kilogramai sveria tiek pat kiek 5 triušiai, todėl 3 triušiai sveria 6 kilogramus, arba tai yra tas pats, kad vienas triušis sveria 2 kg. Todėl 1 zuikis sveria $2 + 3 = 5$ kilogramus.

Atsakymas. Vienas zuikis sveria 5 kg, o vienas triušis – 2 kg.

5. Dešimties litrų indas yra pilnas pripiltas vandens. Kaip iš jo turint 7 ir 3 litrų (tuščius) indus atmatuoti 5 litrus vandens?

Sprendimas. Iš sąlygos žinome, kad dešimties litrų indas yra pilnas, o 7 ir 3 litrų indai yra, kaip pasakyta, tušti. Tada pradinę tų indų būseną galime apibūdinti atitinkamai skaičių (10, 0, 0) trejetu. Po to, pilstydami skystį iš vienos talpos į kitą gauname naujas būsenas ir jas taip pat užrašome atitinkamais skaičių trejetais. Pilstymus tęsime tol, kol gausime atsakymą tai yra tol, kol (kaip mūsų atveju) viename kuriame nors inde nepasirodys skaičius 5.

Atsakymas. Taigi mes matome, kad antrajame 7 litrų talpos inde pasirodo esą įpilti 5 litrai skysčio.

10	0	0
3	7	0
3	4	3
6	4	0
6	1	3
9	1	0
9	0	1
2	7	1
2	5	3

6. Devynių (vienodos masės) rutuliukų Rut masė yra tokia pati kaip ir dviejų vienodų kubelių Ku ir dviejų vienodų ritulių Ri masė. Ritulys yra du kartus lengvesnis už kubelį. Kiek rutuliukų reikėtų paimti, kad jų masė būtų lygi vieno kubelio masei?

Sprendimas. Užrašę tai, kas pasakyta sąlygoje kaip $9Rut = 2Ku + 2Ri$ ir $2Ri = Ku$ ir įrašę antrąją lygybę į pirmąją gauname, kad $9Rut = 3Ku$. Dabar suprastinę gautąją lygybę iš trijų gausime, kad $3Rut = Ku$, o tai ir reiškia, kad vienas kubelis atsveria tris rutuliukus.

Atsakymas. Vienas kubelis atsveria 3 rutuliukus.

7. Dešimt (vienodos masės) apelsinų (A) sveria vienu kilogramu daugiau negu dvidešimt (vienodų) mandarinų (M). Tie patys dešimt apelsinų sveria 500 gramų daugiau negu 30 tokių pat (vienodų) mandarinų. Kiek sveria 1 mandarinas?

Sprendimas. Užrašę tai, kas pasakyta sąlygoje, kaip $10A = 20M + 1$ ir $10A = 30M + 0,5$ turime lygybę $20M + 1 = 30M + 0,5$ arba $1 - 0,5 = 0,5 = 10M$. Tai reiškia, kad $M = 0,05$ arba kad 1 mandarinas sveria 50 gramų.

Atsakymas. Vienas mandarinas sveria 50 gramų.

8. Yra du stiklainiai – vienas 5-litrinis, o kitas 3-litrinis. Kaip turint juos būtų galima į 10-litrų talpos kibirą įpilti 4 litrus vandens? (Vandenį galima perpylinėti iš vienos talpos į kitą, įpylinėti iš krano arba iššpylinėti lauk.)

Sprendimas. Pradžioje laikysime, kad visos trys talpos yra tuščios. Tokią būseną atitinka skaičių trejetas (0, 0, 0). Priklausomai nuo to, kokius veiksmus atlikinėsime (perpylimas, įpylimas iš krano arba iššpylimas lauk), galima gauti skirtingus sprendimo būdus. Nurodysime vieną iš jų (žr. lentelę).

Pastaba. Čia naudojamas perpylimas, iššpylimas lauk ir įpylimas iš krano.

5 litrų indas	3 litrų indas	10 litrų indas
0	0	0
5	0	0
2	3	0
0	3	2
0	0	2
5	0	2
2	3	2
0	3	4

9. Iš devynių vienodų monetų viena pasirodė esanti brokuota, nes ji svėrė mažiau negu likusios monetos. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir padarius ne daugiau kaip du svėrimus galima būtų atrasti tą netikrą monetą?

Sprendimas. Padaliname tas 9 monetas bet kaip į 3 grupes po 3 monetas kiekvienoje grupėje ir lyginame tarpusavyje kiekvienos grupės masę.

1 svėrimas. Iš trijų monetų grupių nustatome tą grupę, kuriai priklauso netikra moneta. Tam mes į kiekvieną iš dviejų svarstyklių lėkštučių dedame bet kurią iš trijų monetų grupių. Grupė, kuriai priklauso netikra moneta, sveria mažiau negu kitos trijų monetų grupės arba likę monetų trejetai. Jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai mes darome išvadą, kad netikra moneta yra trečiojoje (dar nesvertoje) grupėje. Taigi trejetas, kuriame yra netikra moneta, yra nustatomas vienu svėrimu.

2 svėrimas. Iš monetų su netikra moneta trejeto randame netikrą monetą. Ant kiekvienos svarstyklių lėkštutės dedame po vieną monetą. Netikra moneta, kaip žinome, yra lengvesnė. O jeigu svarstyklės pasirodo esančios pusiausvyroje, tai netikra yra toji likusi trečioji trejeto moneta.

10. Iš 27 vienodų kilograminių svarelių vienas pasirodė esąs brokuotas, nes jis svėrė daugiau negu vieną kilogramą. Kaip surasti tą svarelį, turint tik svirtines svarstyklas ir atliekant ne daugiau kaip tris svėrimus?

Sprendimas. Tuos 27 svarelius bet kaip padalijame į 3 grupes po 9 svarelius kiekvienoje grupėje ir su svirtinėmis svarstyklėmis palyginame bet kurių dviejų svarelių grupių po 9 svarelius masę. Grupė, kuriai priklauso netikras svarelis, sveria daugiau negu kiti svarelių devynetai. O jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai darome išvadą, kad netikras svarelis yra trečiajame (dar nebuvusiam ant svarstyklių) svarelių devynete. Taigi devynetas, kuriame yra netikras svarelis, yra nustatomas jau pačiu pirmuoju svėrimu.

Dabar tą devynetą, kuriame yra brokuotas netikras svarelis bet koku būdu padaliname į tris trejetus ir pirmuosius du trejetus dedame ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštucių. Trejetas, kuriam priklauso netikras brokuotas svarelis, sveria daugiau negu kiti svarelių trejetai. O jeigu svarstyklės pasirodė esančios pusiausvyroje, tai darome išvadą, kad netikras svarelis yra trečiame dabar ką tik ant svarstyklių dar nebuvusiam svarelių trejete). Taigi trejetas, kuriame yra netikras svarelis, yra nustatytas antruoju svėrimu.

Insime tą trejetą, kuriame, kaip nustatėme, yra netikras svarelis, ir trečiuoju svėrimu surasime, kuris gi yra tas netikrasis. Tam tikslui insime bet kuriuos du svarelius ir uždėsime juos ant skirtingų svarstyklių lėkštucių. Jeigu svarstyklės nėra pusiausvyroje, tai netikras svarelis yra tas, kuris yra aukštyl pakilusioje lėkštutėje, o jeigu svarstyklės rodo pusiausvyrą, tai netikras yra tas ką tik svėrimo išvengęs svarelis.

11. Turime 10 arbūzų ir dar svarstyklas, su kuriomis vienu svėrimu galime nustatyti bet kurių pasirinktų trijų arbūzų masę. Kaip šešiais svėrimais galima būtų nustatyti bendrą visų dešimties arbūzų masę?

Sprendimas. Sunumeruokime arbūzus sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 10 ir pirmuoju svėrimu pasverkime tris pirmuosius arbūzus 1, 2 ir 3, o antruoju svėrimu – sekančius tris arbūzus 4, 5 ir 6. Mums dar liko sužinoti bendrą likusių paskutiniųjų keturių arbūzų 7, 8, 9 ir 10 masę. Trečiuoju svėrimu pasverkime tris arbūzus 8, 9 ir 10, ketvirtuoju - 7, 9 ir 10, penktuoju - 7, 8 ir 10 ir šeštuoju sužinokime bendrą trijų arbūzų 7, 8 ir 9 masę. Tegul tie svoriai yra atitinkamai C, D, E ir F. Kadangi tuose paskutiniuosiuose keturiuose svėrimuose dalyvavo tik paskutiniai keturi arbūzai ir kiekvienas iš jų buvo sveriamas lygiai po 3 kartus, todėl bendra jų masė yra lygi

$$(C + D + E + F)/3,$$

o tada bendra visų 10 arbūzų masė yra

$$A + B + (C + D + E + F)/3.$$

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Dėžėje yra 24 kg vinių. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir rodyklių atmatuoti lygiai 9 kilogramus vinių?
2. 4 vienodos konservų dėžutės ir 3 vienodi kepaliukai duonos sveria 5 kilogramus, o tos pačios 4 vienodos konservų dėžutės ir 2 vienodi kepaliukai duonos sveria 4 kilogramus. Kiek sveria 1 kepaliukas duonos ir kiek sveria 1 konservų dėžutė?
3. Antanukui padovanojo svarstyklės, ir jis nedelsdamas pradėjo svėrinėti savo žaisliukus. Jo mašinėlę atsverė kamuoliukas ir 2 kubeliai, o mašinėlę su kubeliu – 2 kamuoliukai. Kiek kubelių atsvertų 1 mašinėlę? Visi Antanuko kamuoliukai ir visi Antanuko kubeliai yra vienodi.
4. Turime 11 arbūzų ir dar svarstyklės, su kuriomis vienu svėrimu galime nustatyti bet kurių pasirinktų trijų arbūzų bendrą masę. Kaip šešiais svėrimais galima būtų nustatyti bendrą visų vienuolikos arbūzų masę?
5. Pasišaukė pamotė Pelenę ir tarė jai: „Į du mūsų kibirus telpa 5 ir 9 litrai vandens. Paėmusi juos atnešk iš upės lygiai 3 litrus vandens.“ Lentele pateikite Pelenės užduoties atlikimo būdą.
6. Ar galima 50 litrų benzino išpilstyti per tris bakus taip, kad pirmame bake būtų 10 litrų daugiau benzino negu antrame bake, o perpylus 26 litrus benzino iš pirmojo bako į trečiąjį, trečiajame bake būtų tiek pat benzino, kiek jo yra antrajame bake? Atsakymą paaiškinkite.
7. Dvylikos litrų talpos indas yra sklidinai pripiltas pieno. Kaip būtų galima šį pieną padalinti po lygiai dviem pirkėjams, naudojantis dviem tuščiomis talpomis, viena iš kurių yra 8, o kita 3 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentele.
8. Yra trys indai, kurių talpa yra 8 litrai, 5 litrai ir 3 litrai. 8 litrų indas yra sklidinai pripiltas vandens. Kaip perpilti vandenį į du iš trijų turimų indų, kad kiekviename iš jų būtų po 4 litrus vandens? Sprendimą pateikite lentele.
9. Kaip turint dvi pilnas 10-ties litrų talpas su pienu, atmatuoti po 2 litrus pieno į dvi tuščias talpas, iš kurių viena yra 4, o kita 5 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentele.
10. Turime 79 vienodas monetas, iš kurių viena yra netikra ir lengvesnė už kitas. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir padarius daugių daugiausiai 4 svėrimus surasti tą netikrą monetą?

VII. PROGRESIJOS

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Ši jauniems matematikams pateikiama tema yra tikrai „mokyklinė“, todėl (autorius manymu) visiems uždaviniais – net galbūt pirmą kartą matomiems – turėtų pakakti vadovėliuose aiškinamos teorijos bei per pamokas įgytų įgūdžių. Vis dėlto prie vieno kito gali tekti ir ilgiau susimąstyti, kruopščiau padirbėti ieškant atsakymo.

Prisiminkime, kad realiųjų skaičių seka (x_n) vadinama:

- *aritmetinė* progresija, jeigu $x_1 \in \mathbb{R}$, o visi kiti jos nariai nusakomi formule

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

kurioje d yra kuris nors realusis skaičius;

- *geometrinė* progresija, jeigu $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$, o visi kiti jos nariai nusakomi formule

$$x_{n+1} = x_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

kurioje q yra kuris nors nelygus nuliui ($q \neq 0$) realusis skaičius.

Pagal nusistovėjusią tradiciją, savarankiškam darbui skirtoje užduotyje aritmetinė progresija žymima simboliu (a_n) , o geometrinė progresija – simboliu (b_n) . Be to, tiek viena, tiek kita progresija gali būti ne tik baigtinė, bet ir begalinė seka, – nelygu, koks uždavinys.

Trumpam sustokime prie čia nagrinėjamų išskirtinių sekų pavadinimų. Išsamiau pastudijavę, be didesnio vargo galėtume suprasti, kad kiekvieną (begalinės) aritmetinės progresijos (a_n) narį, pradedant antruoju, galima nusakyti gretimų narių aritmetiniu vidurkiu, taigi formule

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3)$$

O kiekvieną begalinės teigiamos geometrinės progresijos (b_n) narį, pradedant antruoju, galima nusakyti gretimų narių geometrinio vidurkiu

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4)$$

Aišku, kad nė vieno teiginio matematikos moksle nevalia priimti „už gryną pinigą“, jeigu jis nėra įrodytas.

1 teiginys. Begalinė realiųjų skaičių seka (x_n) yra aritmetinė progresija tik kai kiekvienas jos narys pradedant antruoju yra gretimų narių aritmetinis vidurkis, t. y.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5)$$

Irodytas. Jeigu seka (x_n) yra aritmetinė progresija, tai (pagal apibrėžimą) yra toks realusis skaičius d , kuriam esant

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tada

$$x_n = x_1 + (n-1)d = \frac{1}{2}((x_1 + (n-2)d) + (x_1 + nd)) = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}.$$

Tarę, kad sekos (x_n) nariai, pradedant antruoju, apibrėžiami (5) formule, t. y. $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$, $n = 2, 3, \dots$, patikrinkime, ar skirtumas tarp gretimų narių x_k ir x_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) yra pastovus. Gausime, kad

$$x_{k+1} - x_k = \frac{x_k + x_{k+2}}{2} - x_k = \frac{x_{k+2} - x_k}{2} = \frac{(x_{k+2} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_k)}{2}.$$

Iš čia išplaukia, jog

$$2(x_{k+1} - x_k) = (x_{k+2} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_k) \Rightarrow x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1}.$$

Vadinasi, bet kuriam $k \in \{1; 2; 3; \dots\}$ galioja lygybė

$$x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k,$$

reiškianti, jog skirtumas tarp bet kurių sekos (x_n) gretimų narių yra toks pat.

2 teiginys. Begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) yra geometrinė progresija tik kai kiekvienas jos narys, pradant antruoju, yra gretimų narių geometrinis vidurkis, t. y.

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

Irodymas. Tarkime, kad begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) yra geometrinė progresija. Tai reiškia, kad yra toks (teigiamas) skaičius q , kuriam esant galioja lygybė

$$x_{n+1} = qx_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tada

$$x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_{n-1} \cdot qx_n = qx_{n-1} \cdot x_n = x_n^2.$$

Iš čia išplaukia, kad $x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}$, $n = 2, 3, \dots$. Kitaip sakant, kiekvienas geometrinės progresijos narys, pradant antruoju, yra gretimų narių geometrinis vidurkis.

Belieka įrodyti atvirkštinį teiginį. Tarę, kad begalinė teigiamų skaičių seka (x_n) nusakoma (6) formule, turime įsitikinti, kad visi gretimų narių santykiai $\frac{x_{k+1}}{x_k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, yra lygūs.

Kadangi

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\sqrt{x_k \cdot x_{k+2}}}{x_k} = \sqrt{\frac{x_{k+2}}{x_k}} = \sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}}},$$

tai

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^2 = \frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}},$$

o iš čia išplaukia, kad tikrai $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}}$, kai $k = 1, 2, 3, \dots$

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite aritmetinės progresijos a_1, a_2, a_3, \dots pirmųjų devyniolikos narių sumą, jeigu

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

2. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) – jos pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jei galioja šios dvi sąlygos:

$$a_1 + a_3 + a_5 = -12 \quad \text{ir} \quad a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80.$$

3. Aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų m narių suma S_m yra lygi jos pirmųjų k narių sumai S_k , $k \neq m$. Įrodykite, kad šiuo atveju

$$S_{m+k} = 0.$$

4. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) , kurios pirmųjų n narių suma S_n apskaičiuojama pagal formulę

$$S_n = 24n^2 + 17n.$$

5. Įrodykite, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija, jeigu jos pirmųjų n narių sumos S_n formulė yra

$$S_n = An^2 + Bn;$$

čia A ir B yra bet kurie realieji skaičiai, $A \neq 0$.

6. Nustatykite, ar yra tokia aritmetinė progresija (a_n) , kad pirmųjų n narių sumai rasti tiktą formulę

$$S_n = n^2 + 2n - 8,$$

jei n – bet kuris natūralusis skaičius.

7. Trijų skaičių, sudarančių geometrinę progresiją, suma lygi 3, o jų kvadratų suma 21. Raskite šią progresiją.

8. Skaičių 180 išskaidykite į keturis dėmenis taip, kad jie sudarytų geometrinę progresiją, kurios trečias narys 36 vienetais didesnis už pirmą narį.

9. Raskite aritmetinės progresijos (a_n) pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jeigu $S_{10} = 300$, o jos nariai a_1 , a_2 ir a_5 sudaro geometrinę progresiją.

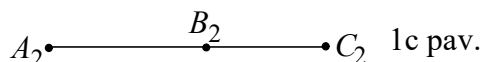
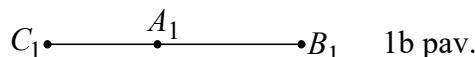
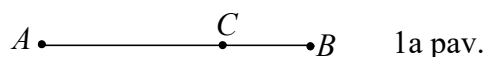
10. Geometrinę progresiją (b_n) sudaro lyginis narių skaičius. Raskite šios progresijos vardiklį q , jei suma S_n yra tris kartus didesnė už nelyginėse pozicijose esančių narių $b_1, b_3, b_5, \dots, b_{n-1}$ sumą.

VIII. ČEVOS IR MENELAJO TEOREMOS

Teorinę medžiagą parengė ir aštuntąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose sužinojote, kad trikampio pusiauakraštinės susikerta viename taške, tokia pačia savybe pasižymi ir trikampio pusiauakampinės bei aukštinės. Minėtos savybės yra bendresnių teoremų, su kuriomis susipažinsite, atlikdami šią užduotį, atskiri atvejai.

Sakykime, kad tiesėje yra trys skirtingi taškai A, B, C . Kadangi vektoriai \overrightarrow{AC} ir \overrightarrow{CB} yra kolinearieji, tai yra toks skaičius k , kad $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$. Šis skaičius k yra vadinamas trijų tiesės taškų paprastuoju santykiu, žymimas $k = (AB, C)$. Pastebėkime, kad šis santykis negali būti lygus -1 , priešingu atveju turėtume lygybę $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, taigi būtų teisingos lygybės $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, taigi taškai A ir B sutaptų. Lygiai taip pat k negali būti lygus 0 , nes tuomet sutaptų taškai A ir C . Pastebėkime, kad kai $k > 0$, taškas C yra atkarpoje AB , ir jis yra lygus atkarpų AC ir CB ilgių santykiui (1a pav.); atskiru atveju, kai $k = 1$, taškas C yra atkarpos AB vidurys. Jei $-1 < k < 0$, tai taškas A yra tarp taškų C ir B (1b pav.), o kai $k < -1$ – taškas B yra tarp taškų A ir C (1c pav.).



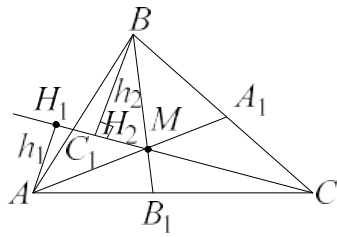
Kokie bebūtų du skirtingi taškai A ir B ir skaičius k , $k \neq 0$, $k \neq -1$, egzistuoja vienintelis tiesės AB taškas C , kad $(AB, C) = k$. Tikrai, iš paprastojo santykio apibrėžimo išplaukia lygybė $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, iš kurios gauname, kad $\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$, $(1+k)\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, todėl taškas C gaunamas nubrėžus vektorių $\overrightarrow{AC} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$. Taigi taško C egzistavimas įrodytas. Tarkime, kad tiesėje AB yra kitas taškas D toks, kad $(AB, D) = k$. Tuomet $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{DB}$, todėl $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{CB} = k(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}) = k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{DC} = -k\overrightarrow{CD}$, taigi $(1+k)\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Kadangi $k \neq -1$, tai ši lygybė galima tik kai $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$, taigi taškai C ir D sutampa.

Čevos teorema (Giovanni Ceva (1648–1734) – italų matematikas ir inžinierius). Trikampio ABC kraštinėse AB, BC ir CA atitinkamai pažymėti taškai C_1, A_1 ir B_1 . Atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

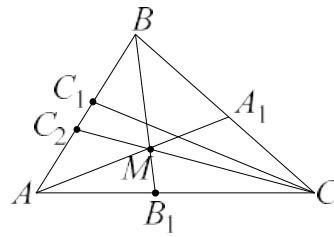
Irodymas. Būtinumas. Tarkime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške M , o $AH_1 = h_1$ ir $BH_2 = h_2$ – atstumai nuo taškų A ir B iki tiesės CM (2 pav.). Tuomet $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}CM \cdot h_1$, $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2}CM \cdot h_2$, tad $\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{h_1}{h_2}$. Iš trikampių AH_1C_1 ir BH_2C_1 panašumo turime $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AC_1}{C_1B}$, tad $\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Analogiškai įsitikiname, kad $\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta BMA}} = \frac{CB_1}{B_1A}$, $\frac{S_{\Delta BMA}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{BA_1}{A_1C}$. Vadinasi, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, atkarpos AA_1 ir BB_1 kertasi taške M , bet tiesė CC_1 neina per tašką M (3 pav.). Jei tiesė CM kerta trikampio kraštinę AB taške C_2 , tai kaip įrodėme yra teisinga lygybė $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Iš šių lygybių gauname, $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

Kadangi atkarpoje AB yra tik vienas taškas, dalijantis ją duotuoju santykiu, tai iš čia išplaukia, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa, taigi atkarpa CC_1 eina per tašką M .



2 pav.



3 pav.

Pastebėkime, kad Čevos teorema yra teisinga ir tada, kai vienas iš taškų A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio kraštinėje, o kiti du – kraštinių tęsinuose. Įrodymas šiuo atveju analogiškas.

Taikant įrodytąją teoremą uždavinių sprendime, svarbu teisingai užrašyti atkarpų santykius. Galima naudoti paprastą taisyklę: pradėti nuo bet kurios trikampio viršūnės (pvz., A), eiti iki trikampio kraštinėje esančio taško C_1 , po to iki kitos viršūnės B , vėl iki kraštinėje esančio taško A_1 ir t. t., iki grįžimo į viršūnę A .

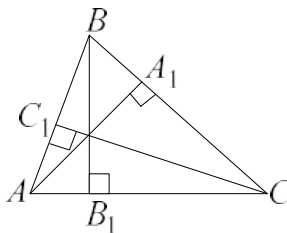
1 pavyzdys. Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC pusiauakraštinės, tai $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Taigi pagal Čevos teoremą trikampio pusiauakraštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio sunkio centru.

Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 – trikampio ABC pusiauakampinės, tai pagal trikampio pusiauakampinių savybę $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}, \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB}{BA}$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1$, taigi trikampio pusiauakampinės susikerta viename taške, kuris yra į trikampį įbrėžto apskritimo centras.

Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 – trikampio ABC aukštinės (4 pav.), tai $AC_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle A$, $C_1B = CC_1 \operatorname{ctg} \angle B$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\operatorname{ctg} \angle A}{\operatorname{ctg} \angle B}$. Analogiškai $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\operatorname{ctg} \angle B}{\operatorname{ctg} \angle C}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\operatorname{ctg} \angle C}{\operatorname{ctg} \angle A}$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

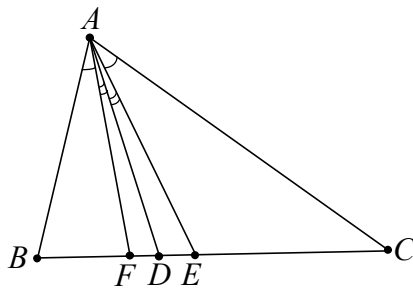
Taigi trikampio aukštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio ortocentru.



4 pav.

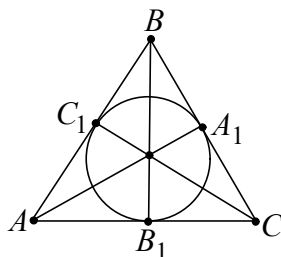
2 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC pusiauakampinė, atkarpa AE yra jo pusiauakraštinė, o kraštinėje BC yra toks taškas F , kad tiesėje AD yra kampo EAF pusiauakampinė (5 pav.), Tuomet atkarpa AF yra vadinama trikampio *simediana*. Iš apibrėžimo išplaukia, kad tiesės AE ir AF yra simetriškos tiesės AD atžvilgiu, taigi $\angle EAD = \angle FAD$, $\angle BAE = \angle CAF$, o $\angle EAC = \angle FAB$. Rasime santykį $\frac{BF}{FC}$. Sakykime, kad h yra trikampio ABC aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės A , ilgis. Dviem būdais skaičiuodami trikampio BAE plotą, turime lygybę $BE \cdot h = AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE$. Analogiškai dviem būdais skaičiuodami trikampio CAF plotą, gauname, kad $CF \cdot h = AC \cdot AF \cdot \sin \angle CAF$. Kadangi $\angle BAE = \angle CAF$, tai iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AF}$. Vadinasi, $CF = \frac{BE \cdot AC \cdot AF}{AB \cdot AE}$. Analogiškai skaičiuodami trikampių ABF ir ACE plotus, gauname tokias lygybes:

$BF \cdot h = AB \cdot AF \cdot \sin \angle BAF$ ir $CE \cdot h = AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE$. Kadangi $\angle BAF = \angle CAE$, tai iš čia turime lygybę $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AF}{AE}$, todėl $BF = \frac{CE \cdot AB \cdot AF}{AC \cdot AE}$. Kadangi taškas E yra kraštinės BC vidurys, tai $BE = CE$, todėl iš gautųjų lygybių gauname, kad $\frac{BF}{FC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Lygiai taip pat gauname lygybes ir kitoms simedianoms BG ir CH : $\frac{AG}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2}$, $\frac{BH}{HA} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Tuomet $\frac{AG}{GC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BH}{HA} = \frac{AB^2}{BC^2} \cdot \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BC^2}{AC^2} = 1$, tai iš Čevos teoremos išplaukia, kad trikampio simedianos susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio Lemuano tašku (E. Lemoine 1840 – 1912 – prancūzų matematikas).



5 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas trikampio kraštinės BC, AC ir AB liečia atitinkamai taškuose A_1, B_1, C_1 . Tuomet tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške. Iš tikrųjų, pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $AB_1 = AC_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$, $CB_1 = CA_1 = z$ (6 pav.). Todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$, taigi iš Čevos teoremos išplaukia, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio Žergono tašku (Joseph Diaz Gergonne, 1771 – 1859, prancūzų matematikas).



6 pav.

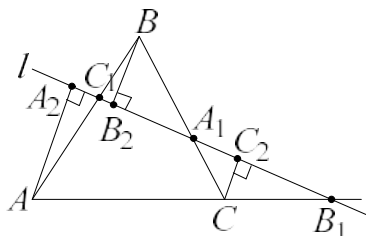
Menelajo teorema (Menelajas Aleksandrietis – I a. graikų mokslininkas). Sakykime, kad tiesėse BC, AC ir AB , kuriose yra trikampio ABC kraštinės, atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1 ir C_1 , be to, arba visi jie yra trikampio kraštinių tęsinuose, arba du jų yra trikampio kraštinėse, o trečiasis – kraštinės tęsinyje. Taškai A_1, B_1 ir C_1 , yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Irodymas. Būtinumas. Sakykime, kad tiesė l kerta trikampio ABC kraštinės AB ir BC taškuose C_1 ir A_1 , o kraštinės AC tęsinį – taške B_1 (7 pav.). Iš trikampio viršūnių nubrėžkime statmenis AA_2, BB_2 , ir CC_2 į tiesę l . Kadangi trikampiai AA_2C_1 ir BB_2C_1 panašieji, tai $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA_2}{BB_2}$. Analogiškai iš trikampių BA_1B_2 ir CA_1C_2 panašumo turime $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_2}{CC_2}$, o iš trikampių AB_1A_2 ir CB_1C_2 panašumo – $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CC_2}{AA_2}$. Iš čia seka, kad $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

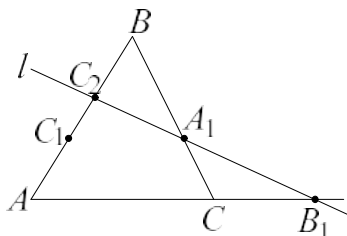
Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, bet taškai A_1, B_1 ir C_1 nėra vienoje tiesėje (8 pav.). Sakykime, kad tiesė A_1B_1 kerta trikampio kraštinę AB taške C_2 . Kadangi

A_1, B_1 ir C_2 yra vienos tiesės taškai, tai kaip jau įrodėme, jiems teisinga lygybė $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Tuomet akivaizdu, kad $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$. Iš to, kad atkarpoje AB yra vienintelis taškas, kuris dalija ją duotuoju santykiu, tai iš šios lygybės išplaukia, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa.

Menelajo teoremos įrodymas nesikeičia, kai visi taškai A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio kraštinių tęsinuose. Norėdami teisingai surašyti atkarpų santykius, galime naudoti tą pačią taisyklę kaip ir Čevos teoremos atveju.



7 pav.

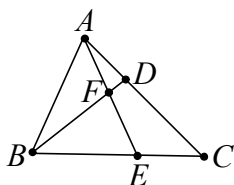


8 pav.

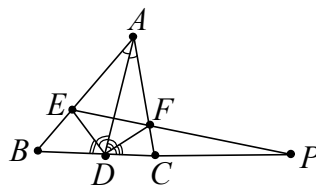
Pastebėkime, kad lygybė $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ yra tokia pati tiek Čevos, tiek Menelajo teoremos atveju. Jei rašytume ne atkarpų santykius, o trijų tiesės taškų paprastuosius santykius, tai Čevos teoremos atveju dešinėje pusėje būtų 1 (nes neigiamų paprastųjų santykių yra arba du, arba nei vieno), o Menelajo teoremos atveju dešinėje pusėje būtų -1 (nes neigiamas yra arba vienas paprastasis santykis, arba visi trys paprastieji santykiai yra neigiami). Taigi taikant paprastuosius santykius, Čevos teoremos formulotėje esančią lygybę galima užrašyti $(AB, C_1) \cdot (BC, A_1) \cdot (CA, B_1) = 1$, o Menelajo teoremos formulotėje esančią lygybę – taip $(AB, C_1) \cdot (BC, A_1) \cdot (CA, B_1) = -1$.

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AC yra toks taškas D , kad $AD : DC = 3 : 5$, o kraštinėje BC – toks taškas E , kad $BE : EC = 3 : 1$. Atkarpos BD ir AE kertasi taške F . Rasime $AF : FE$.

Sprendimas. Nagrinėkime trikampį AEC ir tris tiesės taškus: taškas F kraštinėje AE , taškas B – kraštinės CE tęsinyje ir taškas D – kraštinėje CA (9 pav.). Šiems taškams yra teisinga Menelajo teorema $\frac{AF}{FE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$. Kadangi $EB : BC = 3 : 4$, $CD : DA = 5 : 3$, tai iš Menelajo teoremos turime lygybę $\frac{AF}{FE} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} = 1$, iš kurios išplaukia, kad $\frac{AF}{FE} = \frac{4}{5}$.



9 pav.



10 pav.

5 pavyzdys. Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė, atkarpa DE yra trikampio ABD pusiaukampinė, atkarpa DF yra trikampio ADC pusiaukampinė, tiesės EF ir BC kertasi taške P . Įrodysime, kad tiesės AD ir AP yra statmenos.

Sprendimas. Trikampiu ABC ir trim tiesės taškams E, F, P taikome Menelajo teoremą (10 pav.): $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$. Pagal pusiaukampinių savybę $\frac{AE}{EB} = \frac{DA}{DB}$, $\frac{CF}{FA} = \frac{DC}{DA}$, todėl $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{DA}{DB} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{DC}{DB}$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{DC}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} = 1$, taigi $\frac{BP}{PC} = \frac{DB}{DC}$. Iš trikampio pusiaukampinės savybių gauname, kad

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, taigi $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$. Iš šios lygybės seka: AP yra trikampio ABC kampo A priekampio pusiaukampinė. Gretutinių kampų pusiaukampinės statmenos, tad iš čia išplaukia uždavinio tvirtinimas.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kratinių ilgių $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, atkarpa AD yra pusiaukampinė, atkarpa BE yra pusiauakraštinė. Raskite į kokio ilgio atkarpa kraštinę AB dalija per atkarpa AD ir BE sankirtos tašką ir viršūnę C nubrėžta tiesė.
2. Atkarpa, jungianti trikampio ABC viršūnę A su kraštinės BC tašku A_1 tokiu, kad laužtės ABA_1 ilgis yra lygus trikampio perimetro pusei, vadinama trikampio perimetrise. Įrodykite, kad trikampio perimetrisės susikerta viename taške.
3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad tiesės MN ir BC yra lygiagrečios. Tiesės BN ir CM kertasi taške D , tiesės AD ir BC kertasi taške E . Raskite santykį $BE : EC$.
4. Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje BC , atkarpa DE yra trikampio ADC pusiaukampinė, kraštinėje AB yra toks taškas F , kad atkarpos DF ir DE yra statmenos. Įrodykite, kad atkarpos AD , BE ir CF susikerta viename taške.
5. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AB yra tokie taškai D ir E , kad $BD : DC = 5 : 3$, $AE : EB = 3 : 2$. Atkarpos AD ir CE susikerta taške F . Raskite santykius $CF : FE$ ir $AF : FD$.
6. Trikampio ABC kraštinių ilgių $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 15$. Raskite, kokių santykiu trikampio pusiauakraštinė CD dalija jo pusiaukampinę BE .
7. Trikampis ABC yra įvairiakraštis, kampo A priekampio pusiaukampinė tiesė BC kerta taške D , kampo B priekampio pusiaukampinė kerta tiesę AC taške E , o kampo C priekampio pusiaukampinė tiesė AB kerta taške F . Įrodykite, kad taškai D , E ir F yra vienoje tiesėje.
8. Trikampyje ABC teisinga lygybė $AB : AC = 20 : 11$, atkarpa AD yra jo pusiaukampinė, taškas M yra jos vidurys. Kokių santykiu tiesė BM dalija trikampio kraštinę AC ?
9. Taškas M yra stačiojo lygiašonio trikampio ABC statinio BC vidurys, iš stačiojo kampo viršūnės C nubrėžtas statmuo pusiauakraštinei AM kerta įžambinę AB taške P . Raskite trikampio statinio AC ilgį, jei $PB = \sqrt{2}$.
10. Trikampio ABC pusiauakraštinėje AM yra toks taškas K , kad $CK = AB$, tiesės CK ir AB susikerta taške L . Įrodykite, kad trikampis AKL yra lygiašonis.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

1. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$$

turi dvi skirtingas (realiąsias) šaknis, kurių viena yra du kartus didesnė už kitą?

2. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas išambinę liečia taške, kuris dalija išambinę į 5 cm ir 12 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio statinių ilgius.
3. Aritmetinės progresijos penktasis narys lygus 9, o antrojo ir devintojo jos narių suma lygi 20. Raskite šios progresijos pirmųjų dešimties narių sumą.
4. Nurodykite kiekvieno iš šių skaičių tikrinį daliklį ir taip įrodykite, kad jie sudėtiniai:

$$5^{77} + 19^{89}, \quad 5^{77} + 36^{84}, \quad 36^{89} - 25^{77}.$$

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Baseine yra du vamzdžiai. Per vieną vamzdį vanduo įteka į baseiną, o per kitą – išteka iš jo. Atidarius vien pirmąjį vamzdį, tuščias baseinas pripildomas 2 valandom ilgiau, negu vanduo iš pilno baseino išteka, atidarius vien antrąjį vamzdį. Kai buvo pripildyta trečdalis baseino, buvo atidaryti abu vamzdžiai ir per 8 valandas iš baseino ištekėjo visas vanduo. Per kiek laiko pirmuoju vamzdžiu tuščias baseinas pripildomas, o antruoju vamzdžiu pilnas baseinas ištuštinamas?

Sprendimas. Sakykime, pilnas baseinas ištuštinamas per x valandų, tuomet jis pripildomas per $x + 2$ valandų. Tuomet per 1 val išteka $\frac{1}{x}$ – oji dalis baseino, o per 1 valandą priteka $\frac{1}{x+2}$ – oji dalis baseino. Kadangi per 8 valandas ištekėjo $\frac{1}{3}$ baseino dalimi daugiau, nei įtekėjo, tai turime lygtį $\frac{8}{x} - \frac{8}{x+2} = \frac{1}{3}$. Teigiamoji šios lygties šaknis yra $x = 6$. Taigi vanduo iš baseino išteka per 6 valandas, o baseinas pripildomas per 8 valandas.

Ats.: išteka per 6 valandas, įteka per 8 valandas.

2. Išspręskite lygtį $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5$.

Sprendimas. Žymime $\sqrt{x+1} = y$, čia $x \geq -1$, $y \geq 0$. Gauname: $\frac{3}{y+1} + 2y = 5$, $3 + 2y(y+1) - 5(y+1) = 0$, $2y^2 - 3y - 2 = 0$, $y = 2$ arba $y = -\frac{1}{2}$. Kadangi $y \geq 0$, tai tinka tik $y = 2$. Todėl $\sqrt{x+1} = 2$, $x + 1 = 4$, $x = 3$.

Ats.: 3.

3. Išspręskite lygtį $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)$.

Sprendimas. Žymime $\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = y$. Tuomet $y^2 = \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2}$, todėl $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}\right) = 3\left(y^2 - \frac{8}{3}\right) = 3y^2 - 8$. Todėl lygtis yra tokia $3y^2 - 8 = 5y$, $3y^2 - 5y - 8 = 0$. Šios kvadratinės lygties sprendiniai $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{8}{3}$. Pirmuoju atveju gauname lygtį $\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 12 = 0$, kuri neturi sprendinių.

Antruoju atveju turime: $\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = \frac{8}{3} \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

Ats.: 2; 6.

4. Išspręskite nelygybę $\frac{1}{4x^2} > \frac{1}{(x-1)^2}$.

Sprendimas. Jei trupmenų skaitikliai vienodi, o vardikliai teigiami, tai didesnė ta trupmena, kurios vardiklis mažesnis, todėl duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei $4x^2 < (x-1)^2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. Iš čia $4x^2 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$.

Ats.: $(-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$.

5. Raskite nelygybės $x^2 + 2x - 24 < 0$ sprendinių, kuriems galioja nelygybė $\sqrt{2-5x} < 7$, aibę.

Sprendimas. Pagal sąlygą pirmosios nelygybės sprendiniai turi būti ir antrosios nelygybės sprendiniai, taigi jie turi tenkinti nelygybių sistemą $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 < 0, \\ \sqrt{2-5x} < 7 \end{cases}$ Kadangi kvadratinės lygties $x^2 + 2x - 24 = 0$ sprendiniai yra

$x_1 = 4$, $x_2 = -6$, tai pirmosios nelygybės sprendinių aibė yra skaičių intervalas $(-6, 4)$. Antroji nelygybė turi prasmę, kai $2 - 5x \geq 0$, taigi, kai $x \leq \frac{2}{5}$. Pakėlę abi puses kvadratu, gauname, kad $2 - 5x < 49$, $x > -\frac{47}{5}$. Taigi antrosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\frac{47}{5}, \frac{2}{5}]$. Bendroji intervalų $(-6, 4)$ ir $(-\frac{47}{5}, \frac{2}{5}]$ dalis yra $(-6, \frac{2}{5}]$.

Ats.: $-6 < x \leq \frac{2}{5}$.

6. Natūraliojo skaičiaus n faktorialu yra vadinama sandauga $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Raskite natūralųjį skaičių x , kuriam galioja lygybė $\frac{x!}{6!} = 7!$.

Sprendimas. Aišku, kad $x \geq 7$. Tuomet $\frac{x!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot x}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$. Suprastinę gauname, kad $x = 10$.

Ats.: 10.

7. Įrodykite, kad skaičius $n^3 + 11n$ dalijasi iš 6, kai $n \in \mathbb{N}$.

Sprendimas. Kadangi $n^3 + 11n = (n^3 - n) + 12n = n(n^2 - 1) + 12n = n(n - 1)(n + 1) + 12n$, trijų gretimų natūraliųjų skaičių sandauga $(n - 1)n(n + 1)$ visuomet dalijasi ir iš 3, ir iš 2, taigi ji dalijasi iš 6, skaičius $12n$ irgi dalijasi iš 6, taigi duotasis skaičius dalijasi iš 6 su bet kuriuo natūraliuoju n .

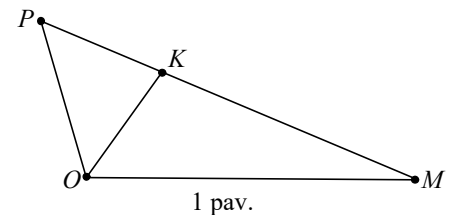
8. Nustatykite, kurioms parametro a reikšmėms (čia $a \neq 0$) parabolės $y = ax^2$ ir $y = (x - 2)^2$ susikerta dviejuose taškuose.

Sprendimas. Tam, kad parabolės $y = ax^2$ su $a \neq 0$ ir $y = (x - 2)^2$ susikirstų dviejuose taškuose, lygtis $ax^2 = (x - 2)^2$ turi turėti du sprendinius. Pertvarkę lygtį, gauname $(a - 1)x^2 + 4x - 4 = 0$. Ši lygtis turi du sprendinius, kai ji yra kvadratinė ($a \neq 1$) ir kai jos diskriminantas teigiamas, t. y., kai $16 + 4 \cdot 4(a - 1) > 0$. Iš čia $1 + a - 1 > 0$, $a > 0$.

Ats.: $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

9. Trikampyje MOP $\angle OMP = 10^\circ$, $\angle MPO = 60^\circ$, $OP = 8$, taškas K yra kraštinėje MP , o $\angle MOK = 50^\circ$, Raskite trikampio OKP perimetrą.

Sprendimas. Kadangi $\angle MOP = 180^\circ - \angle OMP - \angle MPO = 110^\circ$, tai $\angle POK = \angle MOP - \angle MOK = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ (1 pav.). Kadangi trikampio OPK du kampai lygūs 60° , tai trečiasis jo kampas irgi lygus 60° , todėl šis trikampis lygiakraštis, $PK = OK = OP = 8$. Taigi ieškomasis perimetras lygus 24.



Ats.: 24.

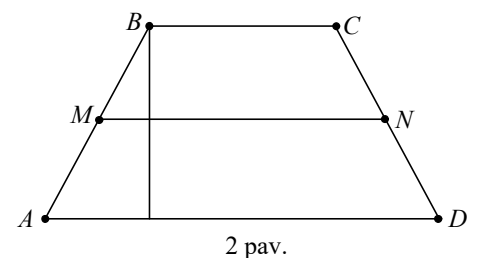
10. Lygiašonės trapecijos, į kurią galima įbrėžti apskritimą, vidurinės linijos ilgis lygus 5, ji dalija trapeciją į dvi dalis, kurių plotų santykis 7 : 13. Raskite trapecijos aukštinę.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = x$, $BC = y$ (2 pav.). Kadangi trapecijos vidurinė linija lygi pagrindų sumos pusei, tai $x + y = 10$. Trapecijos vidurinė linija MN dalija trapeciją į dvi trapecijas, kurių aukštinės lygios duotosios trapecijos aukštinės h pusei. Tuomet pagal sąlygą $\frac{S_{AMND}}{S_{MNCB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x+5) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (y+5) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{x+5}{y+5} = \frac{13}{7}$. Trapecijos

pagrindų ilgius rasime iš sistemos $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x+5}{y+5} = \frac{13}{7} \end{cases}$ kurios sprendinys $x = 8$,

$y = 2$. Į trapeciją galima įbrėžti apskritimą, todėl $AD + BC = AB + CD$. Kadangi trapecija yra lygiašonė, tai trapecijos šoninės kraštinės ilgis lygus $AB = CD = \frac{AD+BC}{2} = 5$. Jei BH – trapecijos aukštinė, tai turime $AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = 3$, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui ABH randame trapecijos aukštinės ilgį $h = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4$.

Ats.: 4.



PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Keleivinio ir prekinio traukinio greičių santykis lygus $a : b$. Keleivinis traukinys išvyko iš stoties A $0,5$ h vėliau negu prekinis, o atvažiavo į stotį B $0,5$ h anksčiau. Atstumas tarp A ir B lygus s km. Apskaičiuokite kiekvieno traukinio greitį.

Sprendimas. Sakykime, kad prekinio traukinio greitis $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o keleivinio $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Pagal sąlygą: $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$, ($a > b > 0$), t. y. $y = \frac{ax}{b}$. Prekinis traukinys važiavo s kilometrų atstumą $\frac{s}{x}$ h, o keleivinis $\frac{s}{y} = s : \frac{ax}{b} = \frac{sb}{ax}$ (h).

Pagal sąlygos antrąją dalį: $\frac{s}{x} - \frac{sb}{ax} = 1$, $\cdot ax$ turime $sa - sb = ax$ ir $x = \frac{s(a-b)}{a}$.

Vadinasi, prekinio traukinio greitis $\frac{s(a-b)}{a} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o keleivinio traukinio greitis $y = \frac{a}{b} \cdot \frac{s(a-b)}{a} = \frac{s(a-b)}{b} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$.

Ats.: $\frac{s(a-b)}{a} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ir $\frac{s(a-b)}{b} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $a > b$.

2. Stačiakampės sporto aikštelės ilgis b m didesnis už plotį. Palei aikštelės kraštus eina vienodo pločio a m takas. Sporto aikštelės plotas lygus to tako plotui. Kokie yra aikštelės matmenys?

Sprendimas. Sakykime, kad aikštelės plotis x m, o ilgis yra $(x + b)$ m. Vadinasi, aikštelės su taku plotis yra $(x + 2a)$ m, o aikštelės su taku ilgis yra $(x + b + 2a)$ m.

Kadangi aikštelės plotas $x(x + b) m^2 = (x^2 + bx) m^2$, o aikštelės su taku plotas yra $(x + 2a) \cdot (x + b + 2a) = x^2 + 2ax + bx + 2ab + 2ax + 4a^2 = x^2 + 4ax + bx + 4a^2 + 2ab = x^2 + (4a + b)x + 4a^2 + 2ab(m^2)$.

Pagal sąlygą aišku, kad aikštelės su taku plotas yra lygus dvigubam aikštelės plotui, todėl:

$$x^2 + (4a + b)x + 4a^2 + 2ab = 2(x^2 + bx),$$

$$x^2 + (-4a + b)x + 4a^2 + 2ab = 2x^2 + 2bx,$$

$$x^2 + (b - 4a)x - (4a^2 + 2ab) = 0.$$

Lygties diskriminantas:

$$D = (b - 4a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(4a^2 + 2ab)) = b^2 - 8ab + 16a^2 + 16a^2 + 8ab = b^2 + 32a^2 > 0,$$

$$\text{o } x_1 \cdot x_2 = -(4a^2 + 2ab) < 0.$$

Vadinasi, lygties sprendiniai yra skirtingų ženklų ir

$$x = \frac{-(b - 4a) \pm \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2} = \frac{4a - b \pm \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2}.$$

Kadangi aikštelės pločio reikšmė teigiama, tai $x = \frac{4a - b + \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2}$ m, o ilgis yra

$$\frac{4a - b + \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2} + b = \frac{4a + b + \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2} \text{ (m)}.$$

Ats.: Ilgis $\frac{4a + b + \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2}$ m, plotis $\frac{4a - b + \sqrt{b^2 + 32a^2}}{2}$ m.

3. Tam tikrą užduotį A darbininkas atlieka a dienų vėliau negu B darbininkas ir b dienų vėliau negu C darbininkas. Dirbdami drauge, A ir B numatytą darbą atlieka per tiek pat dienų, kaip ir C . Per kiek laiko šią užduotį įvykdytų kiekvienas darbininkas atskirai? Kaip turi būti susiję nurodyti dydžiai, kad uždavinys turėtų sprendinį?

Sprendimas. Sakykime, kad C darbininkas atlieka užduotį per x dienų ($x > 0$), B darbininkas – per $(x+b)$ dienų, o A darbininkas per $(x+b-a)$ dienų.

Per 1 dieną

A darbininkas padaro $\frac{1}{x+b-a}$ užduoties,

B darbininkas padaro $\frac{1}{x+b}$ užduoties,

o C darbininko darbo intensyvumas yra $\frac{1}{x}$.

Kadangi dirbdami kartu A ir B darbininkai atlieka numatytą darbą per tiek pat dienų, kaip ir C darbininkas, tai jų darbo intensyvumas per dieną vienodas. Vadinasi:

$$\frac{1}{x+b-a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x}.$$

Turime

$$\frac{x+b+x+b-a}{(x+b)(x+b-a)} = \frac{1}{x}, \quad \frac{2x+2b-a}{(x+b)(x+b-a)} = \frac{1}{x},$$

$$2x^2 + 2bx - ax = x^2 + 2bx + b^2 - ab - ax, \quad x^2 = b^2 - ab \quad \text{ir} \quad x = \pm\sqrt{b^2 - ab}.$$

Kadangi $x > 0$, tai $x = \sqrt{b(b-a)}$ ir $b > a$.

Vadinasi, C darbininkas šią užduotį įvykdytų per $\sqrt{b(b-a)}$ dienų, B darbininkas per $\sqrt{b(b-a)} + b$ dienų, o A darbininkas per $b - a + \sqrt{b(b-a)}$ dienų.

Ats.: A – per $b - a + \sqrt{b(b-a)}$ dienų, B – per $b + \sqrt{b(b-a)}$ dienų, C – per $\sqrt{b(b-a)}$ dienų. Uždavinys turi sprendinį, kai $b > a$.

4. Vienas turistas nuėjo 18 km, o kitas – 32 km. Pirmasis kelyje užtruko 1 h mažiau negu antrasis ir ėjo a km/h mažesniu greičiu. Raskite abiejų turistų greičius. Kaip priklauso sprendinių skaičius nuo a reikšmių ($a > 0$)?

Sprendimas. Tegul pirmojo turistu greitis v km/h, o antrojo $(v+a)$ km/h. Todėl pirmasis kelyje užtruko $\frac{18}{a}$ h, o antrasis – $\frac{32}{v+a}$ h.

Pagal sąlygą:

$$\frac{32}{v+a} - \frac{18}{v} = 1 \cdot v(v+a);$$

$$32v - 18v - 18a = v^2 + av, \quad v^2 + av - 14v + 18a = 0;$$

$$v^2 + (a-14)v + 18a = 0;$$

Sprendžiame lygtį $v^2 - (14-a)v + 18a = 0$.

$$D = (14-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18a = 196 - 28a + a^2 - 72a = a^2 - 100a + 196.$$

Kai $a^2 - 100a + 196 > 0$, lygtis turi du sprendinius. Kadangi

$v_1 \cdot v_2 = 18a > 0$, tai abu sprendiniai teigiami, o $v_1 + v_2 = 14 - a > 0$.

Vadinasi, $a < 14$.



Reiškinio $a^2 - 100a + 196$ reikšmės yra teigiamos, atsižvelgus į $a < 14$ ir $a > 0$, kai $a \in (0; 2)$.

Kai $a \in (0; 2)$, pirmojo turistų greitis $v = \frac{14 - a \pm \sqrt{a^2 - 100a + 196}}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

o antrojo $\frac{14 - a \pm \sqrt{a^2 - 100a + 196}}{2} + a = \frac{14 + a \pm \sqrt{a^2 - 100a + 196}}{2} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$.

Kai $a = 2$, tai lygtis yra $v^2 - 12v + 36 = 0$ ir pirmojo turistų greitis $v = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o antrojo $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kai $a > 2$, lygtis sprendinių neturi.

Ats.: Kai $a \in (0; 2)$, tai du sprendiniai:

pirmojo turistų greitis $\frac{14 - a \pm \sqrt{a^2 - 100a + 196}}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, antrojo $\frac{14 - a \pm \sqrt{a^2 - 100a + 196}}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kai $a = 2$, vienas sprendinys: pirmojo turistų greitis $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, antrojo – $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kai $a > 2$, sprendinių nėra.

5. Du sportininkai bėga vienu uždaru stadiono taku. Kiekvieno jų greitis pastovus, tačiau pirmasis visą takelį nubėga a s greičiau negu antrasis. Pradėję bėgti ta pačia kryptimi iš vienos vietos, sportininkai susilygina kas b s. Po kiek laiko jie susilygintų, jeigu tais pačiais greičiais ir tuo pačiu taku bėgtų priešingomis kryptimis?

Sprendimas. Tarkime, kad stadiono tako ilgis yra k metrų, pirmasis sportininkas nubėgo visą takelį per t s, o antrasis – per $(t + a)$ s.

Vadinasi, pirmojo sportininko greitis yra $\frac{k}{t} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, o antrojo $\frac{k}{t + a} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Kai sportininkai bėga ta pačia kryptimi, tai per 1 sekundę greitesnysis nutolsta nuo lėčiau bėgančio $\frac{k}{t} - \frac{k}{t + a} = \frac{kt + ka - kt}{t(t + a)} = \frac{ka}{t(t + a)}$ (metrais) ir paveja jį (susilygina) per $k: \frac{ka}{t(t + a)} = \frac{t(t + a)}{a}$ (sekundžių).

Pagal sąlygą: $\frac{t(t + a)}{a} = b \cdot a$; $t^2 - at = ab$; vadinasi, $t^2 + at - ab = 0$.

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-ab) = a^2 + 4ab$. Akivaizdu, kad $D > 0$. Kadangi $t_1 \cdot t_2 = -ab < 0$, lygties

sprendiniai yra skirtingų ženklų, todėl teigiamas sprendinys: $\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2}$.

Vadinasi, pirmasis sportininkas nubėga takelį per $\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2}$ s, antrasis per $\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2} + a = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2}$ (s).

Todėl pirmojo sportininko greitis yra $k: \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2} = \frac{2k}{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$, o antrojo – $k: \frac{a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2} = \frac{2k}{a + \sqrt{a^2 + 4ab}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$.

Kai sportininkai bėga priešingomis kryptimis, tai per 1 sekundę jie priartėja vienas prie kito

$$\frac{2k}{\sqrt{a^2 + 4ab + a}} + \frac{2k}{\sqrt{a^2 + 4ab - a}} = \frac{2k(\sqrt{a^2 + 4ab - a} + \sqrt{a^2 + 4ab + a})}{a^2 + 4ab - a^2} = \frac{2k \cdot 2\sqrt{a^2 + 4ab}}{4ab} =$$

$$= \frac{k\sqrt{a^2 + 4ab}}{ab} \text{ (metrų).}$$

Todėl bėgdami priešingomis kryptimis sportininkai susitiktų po

$$k: \frac{k\sqrt{a^2 + 4ab}}{ab} = \frac{k \cdot ab}{k \cdot \sqrt{a^2 + 4ab}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 4ab}} \text{ (s).}$$

$$\text{Ats.: Po } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 4ab}} \text{ s.}$$

6. Iš vietovės A upe prieš srovę išplaukė motorinė valtis, o iš vietovės B tuo pačiu metu pasroviui plaustas. Po a h jie susitiko ir toliau plaukė nesustodami. Pasiekusi vietovę B valtis tuoj pat grįžo ir vietovėje A pasivijo plaustą. Motorinės valtys savasis greitis visą laiką buvo pastovus. Kiek laiko plaukė plaustas ir kiek – valtis?

Sprendimas. Tegul valtys savasis greitis yra $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o upės tėkmės greitis – $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, tai motorinės valtys greitis prieš srovę $(v - x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$, o pasroviui – $(v + x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Iki valtys susitikimo su plaustu jie abu per a h nuplaukė kelią, lygų atstumui nuo vietovės A iki vietovės B , t. y.

$$(v - x) \cdot a + x \cdot a = va - xa + xa = av \text{ (km).}$$

Kadangi plaustas iš B į A plaukė $\frac{av}{x}$ h, o motorinė valtis iš A į B plaukė $\frac{av}{v - x}$ h, o iš B į A

$\frac{av}{v + x}$ h, tai pagal sąlygą:

$$\frac{av}{x} = \frac{av}{v - x} + \frac{av}{v + x} \quad | : av.$$

Turime

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{v - x} + \frac{1}{v + x}; \quad \frac{1}{x} = \frac{v + x + v - x}{v^2 - x^2}; \quad \frac{1}{x} = \frac{2v}{v^2 - x^2}; \quad v^2 - x^2 = 2vx.$$

Gavome lygtį $x^2 + 2vx - v^2 = 0$.

$D = (2v)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-v^2) = 4v^2 + 4v^2 = 8v^2$, $x_1 \cdot x_2 = -v^2 < 0$. Akivaizdu, kad $D > 0$, tai lygtis turi du skirtingų ženklų sprendinius. Vadinasi, upės tėkmės greitis

$$x = \frac{-2 + \sqrt{8v^2}}{2} = \frac{-2v + 2\sqrt{2}v}{2} = -v + \sqrt{2}v = (\sqrt{2} - 1)v \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right).$$

Motorinė valtis plaukė tiek pat laiko, kiek ir plaustas iš B į A , t. y.

$$\frac{av}{(\sqrt{2} - 1)v} = \frac{a(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = a(\sqrt{2} + 1) \text{ (h).}$$

Ats.: $a(\sqrt{2} + 1)$ h.

7. Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ turi du skirtingus neigiamus sprendinius?

Sprendimas. Visų pirma kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $D > 0$, t. y.

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 = m^2 - 2m - 15.$$

Kadangi abu sprendiniai neigiami, tai $x_1 \cdot x_2 = m + 4 > 0$, o $x_1 + x_2 = m + 1 < 0$. Vadinasi, $-4 < m < -1$.

Sprendžiame nelygybę $m^2 - 2m - 15 > 0$.

Parabolė $m^2 - 2m - 15$ kerta m ašį, kai $m_1 = -3$ ir $m_2 = 5$.



Nelygybės sprendinys $m \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

Lygtis turi du skirtingus neigiamus sprendinius su m reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} -4 < m < -1, \\ m < -3, m > 5. \end{cases} \quad \text{Vadinasi, } m \in (-4; -3).$$

Ats.: $m \in (-4; -3)$.

8. Raskite sveikąją a reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ sprendinių suma lygi tų sprendinių kvadratų sumai?

Sprendimas. $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$. Lygtis $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ turi du sprendinius, kai

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot (2a-1) \cdot 4a^2 - 8a + 4 = 4(a-1)^2 > 0.$$

Kadangi $x_1 \cdot x_2 = 2a - 1$, o $x_1 + x_2 = 2a$, tai $x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 4a^2$ ir

$$x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2 \cdot (2a - 1).$$

Pagal sąlygą:

$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2, \text{ tai } 2a = 4a^2 - 4a + 2; \quad 4a^2 - 6a + 2 = 0 \text{ ir } 2a^2 - 3a + 1 = 0.$$

$$a_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \quad (\text{netenkina sąlygos } a \in \mathbb{Z})$$

Ats.: $a = 1$.

9. Išspręskite lygtį $a^2(x+1) - 2a(x+3) - 3(x-3) = 0$.

Sprendimas. $a^2(x+1) - 2a(x+3) - 3(x-3) = 0$.

$$a^2x + a^2 - 2ax - 6a - 3x + 9 = 0; \quad (a^2 - 2a - 3)x = -a^2 + 6a - 9;$$

$$(a+1)(a-3)x = -(a-3)^2; \quad x = \frac{-(a-3)^2}{(a+1)(a-3)}.$$

Kai $a \neq -1$, $a \neq 3$, tai $x = \frac{3-a}{a+1}$.

Kai $a = 3$, tai turime lygtį $0 \cdot x = 0$ ir $x \in \mathbb{R}$.

Kai $a = -1$, tai lygtis $0 \cdot x = -16$ ir sprendinių nėra.

Ats.: Kai $a \neq -1$, $a \neq 3$, tai $x = \frac{3-a}{a+1}$; kai $a = 3$, $x \in \mathbb{R}$; kai $a = -1$, lygtis sprendinių neturi.

10. Išspręskite lygtį $\frac{1}{a(2+x)} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2a+6}{x^3-4x}$.

Sprendimas.

$$\frac{1}{a(x+2)} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{2a+6}{x(x^2-4)} \quad | \cdot ax(x^2-4), \quad a \neq 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq \pm 2;$$

$$x(x-2) + a(x+2) = a(2a+6); \quad x^2 + a(x-2)x - 4a - 2a^2 = 0; \quad x^2 - 2x + ax + 2a - 6a - 2a^2 = 0.$$

$$D = (a-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a(a+2)) = a^2 - 4a + 4 + 8a^2 + 16a = 9a^2 + 12a + 4 = (3a+2)^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{2-a \pm (3a+2)}{2}, \quad x_1 = \frac{2-a-3a-2}{2} = -2a, \quad x_2 = \frac{2-a+3a+2}{2} = \frac{4+2a}{2} = a+2.$$

Atsižvelgus į reikalavimus $x \neq 0$ ir $x \neq \pm 2$ turime:

$$-2a \neq 0, \quad a \neq 0; \quad -2a \neq -2, \quad a \neq 1; \quad -2a \neq 2, \quad a \neq -1.$$

$$a+2 \neq 0, \quad a \neq -2; \quad a+2 \neq -2, \quad a \neq -4; \quad a+2 \neq 2, \quad a \neq 0.$$

Kai $a = -4$, turime lygtį $x^2 - 6x + 8 \cdot (-2) = 0$ ir $x^2 - 6x - 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} -2 \text{ (netinka),} \\ 8. \end{cases}$$

Kai $a = -2$, turime lygtį $x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$ (netinka), $x_2 = 4$.

Kai $a = -1$, turime lygtį $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2 \text{ (netinka).} \end{cases}$

Kai $a = 1$, turime lygtį $x^2 - x - 6 = 0$, $x_{1,2} = 1 \frac{3 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \text{ (netinka),} \\ 3. \end{cases}$

Kai $a = 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

Ats.: Kai $a \neq -4$, $a \neq -2$, $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, tai $x_1 = -2a$, $x_2 = a+2$.

Kai $a = -4$, tai $x = 8$; kai $a = -2$, tai $x = 4$; kai $a = -1$, tai $x = 1$; kai $a = 1$, tai $x = 3$.

Kai $a = 0$, lygtis sprendinių neturi.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Patikrinkite, kad intervale (2015;2035) trys skaičiai yra pirminiai, o likę 16 sveikųjų skaičių jame yra sudėtiniai.

Sprendimas. Intervalo sveikieji skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 0, 2, 4, 6, 8 arba 5, dalijasi iš 2 arba iš 5, tad yra sudėtiniai. Kiti, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 3, patys dalijasi iš 3 ir taip pat yra sudėtiniai (tai skaičiai 2019 ir 2031). Lieka skaičiai 2017, 2021, 2023, 2027, 2029, 2033. Jie nesidalija iš 2, 3 ir 5. Kadangi $\sqrt{2033} < 46$, tai pakanka tikrinti jų dalumą iš 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 ir 43. Gauname, kad trys skaičiai 2017, 2027, 2029 iš šių pirminių skaičių nesidalija, todėl patys yra pirminiai. Tuo tarpu likę skaičiai $2021 = 43 \cdot 47$, $2023 = 7 \cdot 289$, $2033 = 19 \cdot 107$ yra sudėtiniai.

2. Duota, kad kažkurie du iš skaičių $a_1 = 2^{11\,099} - 1$, $a_2 = 2^{11\,213} - 1$, $a_3 = 2^{11\,213} + 1$, $a_4 = 42^{11\,213} - 1$, $a_5 = 2^{162} + 21^{11\,210}$, $a_6 = 2^{16} + 1$, $a_7 = 2^{80} + 1$ yra pirminiai. Likusiems penkiems skaičiams nustatykite po tikrinį daliklį ir taip įrodykite, kad jie sudėtiniai (dviejų pirminių skaičių nenagrinėkite).

Sprendimas. Kadangi $11\,099 = 11 \cdot 1\,009$, $80 = 16 \cdot 5$ (skaičius 5 nelyginis), skaičius $11\,213$ nelyginis, tai duotieji skaičiai turi atitinkamus tikrinius daliklius $d_1 = 2^{11} - 1 = 2\,047$ (taip pat $d'_1 = 2^{1\,009} - 1$), $d_3 = 2 + 1 = 3$, $d_7 = 2^{16} + 1$. Skaičius a_4 dalijasi iš $d_4 = 42 - 1 = 41$. Kadangi 2^4 ir 21 dalijasi iš 5 su liekana 1, tai $21^{11\,210}$ dalijasi iš 5 su liekana 1, o $2^{162} = (2^4)^{40} \cdot 4$ – su liekana 4. Pažymėję $2^{162} = 5k + 4$ ir $21^{11\,210} = 5l + 1$, gauname, kad $a_5 = (5k + 4) + (5l + 1) = 5(k + l + 1)$ turi tikrinį daliklį $d_5 = 5$.

Pastaba. Tarkime, kad skaičius n yra natūralusis, o skaičius $p = 2^n + 1$ pirminis. Jei n turi nelyginį daliklį $d > 1$, tai p turi tikrinį daliklį $2^{\frac{n}{d}} + 1$ bei yra sudėtinis (pvz., $n = 80$, $p = a_7$). Taigi n nesidalija iš jokio nelyginio pirminio skaičiaus ir yra dvejetainio laipsnis: $2^0, 2^1, 2^2, \dots$. Skaičiai $F_k = 2^{2^k} + 1$, kur $k = 0, 1, 2, \dots$, vadinami **Ferma skaičiais** (prancūzų matematikas Pierre de Fermat, 1601–1665). Ne visi Ferma skaičiai pirminiai: pavyzdžiui, $F_5 = 2^{32} + 1$ dalijasi iš 641. Tačiau skaičius $a_6 = F_4$ yra pirminis, kaip ir F_0, F_1, F_2, F_3 . Tuo tarpu a_2 yra pirminis Merseno skaičius. Kad šie gana dideli skaičiai pirminiai, yra patikrinta kompiuteriu.

Ats.: atitinkami dalikliai $d_1 = 2\,047$ (arba $d'_1 = 2^{1\,009} - 1$), $d_3 = 3$, $d_4 = 41$, $d_5 = 5$, $d_7 = 2^{16} + 1$.

3. Skaičiams $a_1 = 237^{3913} - 10^{817}$, $a_2 = 23^{3913} + 10^{718}$, $a_3 = 81^{815} + 25 \cdot 10^{814}$ nustatykite po tikrinį daliklį ir taip įrodykite, kad jie sudėtiniai. *Užuomina.* Vienam iš skaičių pritaikykite 4 pavyzdžio idėjas.

Sprendimas. Skaičius $3913 = 13 \cdot 301 = 13 \cdot 7 \cdot 43$ turi daliklį 43, bendrą su skaičiumi $817 = 43 \cdot 19$. Taigi skaičius a_1 turi tikrinį daliklį $d_1 = 237^{13 \cdot 7} - 10^{19}$.

Skaičiai 23^2 ir 10 dalijasi iš 3 su liekana 1, todėl 10^{718} dalijasi iš 3 su liekana 1, o $(23^2)^{1956} \cdot 23$ – su liekana 2 (kaip skaičius 23). Pažymėję $23^{3913} = 3k + 2$ ir $10^{718} = 3l + 1$, gauname, kad $a_2 = (3k + 2) + (3l + 1) = 3(k + l + 1)$ turi tikrinį daliklį $d_2 = 3$.

Kadangi $a_3 = a^2 + b^2$, kur $2ab = 2 \cdot 9^{815} \cdot 5 \cdot 10^{407} = (3^{815} \cdot 10^{204})^2$, tai galimas toks išskaidymas:

$$a_3 = (a + b)^2 - 2ab = (9^{815} + 5 \cdot 10^{407} - 3^{815} \cdot 10^{204})(9^{815} + 5 \cdot 10^{407} + 3^{815} \cdot 10^{204}).$$

Čia pirmasis dauginamasis d_1 mažesnis už antrąjį, bet didesnis už 1, nes $d_1 > 9^{815} - 3^{815} \cdot 10^{204} > 9^{815} - 3^{815} \cdot 27^{204} = 3^{1630} - 3^{1427}$. Taigi tai tikrinis a_3 daliklis.

Ats.: atitinkami dalikliai $d_1 = 237^{91} - 10^{19}$, $d_2 = 3$, $d_3 = 9^{815} + 5 \cdot 10^{407} - 3^{815} \cdot 10^{204}$.

4. Nustatykite visas galimas pirmines $|f(n)|$ reikšmes, kai skaičius n sveikasis ir $f(n) = n^3 - n^2 - 7n + 3$. *Užuomina.* Atspėkite dauginario $f(n)$ sveikąją šaknį.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $c = 3$ yra $f(n)$ šaknis, t. y. $f(3) = 0$. Taigi $f(n)$ įmanoma išskaidyti taip:

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2(n - 3) + 3n^2 - n^2 - 7n + 3 = n^2(n - 3) + 2n^2 - 7n + 3 = \\ &= n^2(n - 3) + 2n(n - 3) + 6n - 7n + 3 = (n^2 + 2n)(n - 3) - n + 3 = (n - 3)(n^2 + 2n - 1). \end{aligned}$$

Jei skaičius n sveikasis, o skaičius $|f(n)|$ pirminis, tai $n - 3 = \pm 1$ arba $n^2 + 2n - 1 = \pm 1$. Tada $n = 4, 2, -1 \pm \sqrt{3}, 0$ arba -2 . Tinka $|f(4)| = 23$, $|f(2)| = 7$, $|f(0)| = 3$, $|f(-2)| = 5$.

Ats.: 3, 5, 7, 23.

5. Skaičius n sveikasis. Nustatykite visas galimas pirmines $|f(n)|$ reikšmes ir visas atitinkamas n reikšmes, kai a) $f(n) = 100 \dots 0729$, čia tarp 1 ir 7 yra $6n - 3$ nulčių, $n \geq 1$; b) $f(n) = n^4 + n^3 - 6$.

Sprendimas. a) Skaičius $|f(n)| = 10^{6n} + 729 = (10^{2n})^3 + 9^3$ visada turi tikrinį daliklį $d = 10^{2n} + 9$, todėl nėra pirminis jokiame $n \geq 1$.

b) Dviejų lyginių arba nelyginių skaičių suma $n^4 + n^3$ visada lyginė. Todėl skaičius $|f(n)|$ taip pat visada lyginis ir gali būti pirminis, nebent jei $f(n) = \pm 2$. Tada $n^4 + n^3 = 8$ arba 4 . Kadangi $n^4 + n^3$ dalijasi iš n^3 , tai gali tiktai tik $n = \pm 1$ ir $n = \pm 2$. Tinka tik $n = -2$.

Ats.: a) tokių $|f(n)|$ reikšmių nėra; b) $|f(n)| = 2$, kai $n = -2$.

6. Raskite natūraliuosius k ir l , mažesnius už 929, kuriems $350k$ dalijasi iš (pirminio) skaičiaus 929 su liekana 1, o $350l$ – su liekana 79.

Sprendimas. Nagrinėkime ciferblatą su 929 padalomis 0, 1, ..., 928 ir rodykle ties 0 bei rodyklės posūkius per 350 padalų pagal laikrodžio rodyklę. Iš eilės gauname lygybes: 1) $3 \cdot 350 - 929 = 121$; 2) $8 \cdot 121 - 929 = 39$; 3) $24 \cdot 39 - 929 = 7$; 4) $133 \cdot 7 - 929 = 2$; 5) $465 \cdot 2 - 929 = 1$. Jos parodo, kad rodyklė bus ties 1 po $3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 133 \cdot 465 = 35\,622\,720$ posūkių arba po $k = 35\,622\,720 - 929 \cdot 38\,345 = 215$ posūkių. Tada rodyklė bus ties 79 po $79 \cdot 215 = 16\,985$ arba po $l = 16\,985 - 929 \cdot 18 = 263$ posūkių.

Ats.: $k = 215$, $l = 263$.

7. Nagrinėkime aritmetinę progresiją 1, 7, 13, ...

a) Įrodykite, kad joje yra be galo daug narių, turinčių daugiau nei 6 teigiamus daliklius.

b) Nustatykite, kiek daugiausiai šioje progresijoje yra iš eilės einančių narių, kurie yra pirminiai skaičiai.

Sprendimas. a) Perrinkdami progresijos narius, randame narį $175 = 5^2 \cdot 7$, kuris turi 6 daliklius 1, 5, 7, 25, 35, 175. Prie jo vis pridėdami 6, gauname be galo daug progresijos narių $175 + 6 \cdot 175k$, kur $k = 1, 2, 3, \dots$. Jie dalijasi iš 175, bet yra didesni už 175, taigi turi tuos pačius šešis skaičiaus 175 daliklius ir dar bent po vieną teigiamą daliklį (patį skaičių). Gavome be galo daug progresijos narių, turinčių daugiau nei 6 teigiamus daliklius.

b) Penktasis progresijos narys 25 dalijasi iš 5. Todėl iš 5 dalijasi kas penktas progresijos narys $25 + 6 \cdot 5k$, kur $k = 0, 1, 2, \dots$. Šie skaičiai didesni už savo daliklį 5, todėl yra sudėtiniai. Tarp tokių narių progresijoje, kaip ir prieš pirmąjį tokį narį 25, yra po 4 narius, todėl joje negali būti daugiau nei 4 iš eilės einantys pirminiai nariai. Kita vertus, tokius 4 narius galima rasti tarp narių 55 ir 85: tai pirminiai skaičiai 61, 67, 73, 79.

Ats.: b) 4.

8. Nesinaudodami Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas, įrodykite: aritmetinėje progresijoje 5, 11, 17, ... yra be galo daug pirminių skaičių.

Sprendimas. Mums pravers du pastebėjimai.

1) Natūralieji skaičiai dalijasi iš 6 su liekana 0, 1, 2, 3, 4, 5 ir sudaro atitinkamas progresijas 6, 12, 18, ...; 1, 7, 13, ...; 2, 8, 14, ...; 3, 9, 15, ...; 4, 10, 16, ...; 5, 11, 17, Keturiose iš jų (išskyrus antrąją ir šeštąją) visi skaičiai dalijasi iš 2 arba iš 3 bei yra sudėtiniai, išskyrus skaičius 2 ir 3. Taigi kiekvienas pirminis skaičius arba dalijasi iš 6 su liekana 1 arba 5, arba yra lygus 2 arba 3.

2) Sudauginę bet kiek natūraliųjų skaičių, besidalijančių iš 6 su liekana 1, gausime sandaugą, kuri dalijasi iš 6 su liekana 1. Taigi pirminių skaičių iš progresijos 1, 7, 13, ... sandauga niekada nesidalija iš 6 su liekana 5.

Tarkime, kad progresijoje 5, 11, 17, ... tėra k pirminių skaičių q_1, q_2, \dots, q_k (baigtinis kiekis). Nagrinėkime jų sandaugą $Q = q_1 q_2 q_3 \dots q_k$. Skaičius $6Q - 1$ nesidalija iš q_k (priešingu atveju dalytųsi $6Q - (6Q - 1) = 1$). Analogiškai $6Q - 1$ nesidalija iš q_1, q_2, \dots, q_{k-1} , taip pat iš 2 ir 3. Kadangi $6Q - 1 = 6(Q - 1) + 5$ nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus, kurio dalybos iš 6 liekana yra 5, nei iš 2 ar 3, tai šis skaičius pats nėra pirminis ir yra pirminių skaičių iš progresijos 1, 7, 13, ... sandauga. Tačiau tada ši sandauga $6(Q - 1) + 5$ dalijasi iš 6 su liekana 1. Gavome prieštarą. Vadinasi, duotojoje progresijoje yra be galo daug pirminių skaičių.

9. Natūraliojo skaičiaus n SPD yra $5^{500} \cdot p^2$ (čia skaičius $p \neq 5$ pirminis). Įrodykite, kad yra be galo daug p reikšmių, kurioms skaičiaus n visų teigiamų daliklių suma dalijasi iš 7, ir raskite 9-ąją mažiausią tokią reikšmę.

Sprendimas. Skaičiaus n teigiami dalikliai yra skaičiai $5^x \cdot p^y$, kur $x = 0, 1, 2, \dots, 500$ ir $y = 0, 1, 2$. Daliklių, kuriems $y = 0$, suma s_0 lygi $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{500}$. Čia $5s_0 = s_0 - 1 + 5^{501}$ ir $s_0 = \frac{5^{501}-1}{4}$. Visų n teigiamų daliklių suma lygi $s = s_0 + s_1 + s_2 = s_0 + ps_0 + p^2s_0 = s_0 \cdot (1 + p + p^2) = \frac{5^{501}-1}{4} \cdot (1 + p + p^2)$.

Jei s dalijasi iš pirminio skaičiaus 7, tai bent vienas iš dauginamųjų $1 + p + p^2$ ir s_0 dalijasi iš 7 (Euklido lema). Kadangi 5^6 dalijasi iš 7 su liekana 1, tai $5^{501} = (5^6)^{83} \cdot 5^3$ dalijasi iš 7 su liekana 6 (kaip ir skaičius 5^3). Todėl $4s_0 = 5^{501} - 1$ bei s_0 iš 7 nesidalija, ir iš 7 būtinai turi dalytis $1 + p + p^2$. Jei $p = 7k + r$ (r – atitinkamos dalybos iš 7 liekana), tai $1 + p + p^2 = 7 \cdot \dots + 1 + r + r^2$ (vietoj daugtaškio sveikasis skaičius). Taigi iš 7 turi dalytis $1 + r + r^2$. Patikrinę reikšmes $r = 0, 1, \dots, 6$, gauname, kad tinka visi pirminiai $p \neq 5$, kurie dalijasi iš 7 su liekana 2 arba 4. Progresijose 2, 9, 16, ... ir 4, 11, 18, ... yra po be galo daug pirminių skaičių (Dirichlė teorema), todėl tinkamų p reikšmių yra be galo daug – tai ir reikėjo įrodyti. Rašydami didėjimo tvarka progresijų narius, nustatome devintąjį tinkamą p . Galime praleisti lyginius (sudėtinius) skaičius, prie antrosios skaičių $7k + 2$ ir $7k + 4$ poros 9, 11 vis pridėdami po 14, o ne po 7:

2, 4, 9, 11, 23, 25, 37, 39, 51, 53, 65, 67, 79, 81, 93, 95, 107, 109,

Ats.: $p = 109$.

- 10.** Natūralusis skaičius m vadinamas **tobulu**, jei jo visų teigiamų daliklių, išskyrus patį m , suma $s(m)$ lygi m . Pavyzdžiui, skaičius $m = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ yra tobulas. Nagrinėkime skaičius $n = 2^a \cdot p$, kur skaičius a natūralusis, o skaičius $p > 2$ pirminis. Nustatykite ketvirtąjį mažiausią tokį skaičių n , kuris yra tobulas. *Užuomina.* Užrašykite $n = 2^a \cdot p$ teigiamų daliklių sumos $s(n) + n$ formulę. Pritaikykite ją atveju, kai n tobulas.

Sprendimas. Jei $s_0 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^a$, tai $2s_0 = s_0 - 1 + 2^{a+1}$ ir $s_0 = 2^{a+1} - 1$. Tada skaičiaus $n = 2^a \cdot p$ visų teigiamų daliklių suma $s(n) + n$ lygi

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^a + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^ap = s_0 + ps_0 = (2^{a+1} - 1)(1 + p).$$

Skaičius n yra tobulas tada ir tik tada, kai $s(n) = n$, taigi kai $s(n) + n = 2n$, arba

$$(2^{a+1} - 1)(1 + p) = 2^{a+1}p, \quad 2^{a+1} - 1 + 2^{a+1}p - p = 2^{a+1}p, \quad p = 2^{a+1} - 1.$$

Vadinasi, skaičius $n = 2^a \cdot p$ yra tobulas tada ir tik tada, kai $p = M_{a+1}$ yra pirminis Merseno skaičius. Didėjant skaičiui a , didėja ir $n = 2^a \cdot (2^{a+1} - 1)$. Sekos M_2, M_3, \dots ketvirtasis pirminis narys yra $M_7 = 2^7 - 1 = 127$. Taigi ieškomas ketvirtasis mažiausias tinkamas skaičius lygus $2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128$.

Pastaba. Tobuli natūralieji skaičiai domino dar senovės graikus (ir buvo jų praminti tobulais). Galima įrodyti, kad kiekvienas lyginis tobulas skaičius turi mūsų nustatytą pavidalą $2^a \cdot M_{a+1}$, kur Merseno skaičius $p = M_{a+1}$ pirminis. Iki šiol (2025 m. pradžioje) nėra žinoma, ar egzistuoja nors vienas nelyginis tobulas skaičius.

Ats.: $n = 8128$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Raskite visas parametro a reikšmes, kurioms esant vienas kvadratinės lygties

$$(a-1)x^2 - 4ax + 4(a+1) = 0, \quad a \neq 1,$$

sprendinys yra neigiamas, o kitas – didesnis už 1.

Sprendimas. Kadangi

$$D = (4a)^2 - 4 \cdot (a-1) \cdot 4(a+1) = 16,$$

tai

$$x = \frac{2a \pm 2}{a-1}, \quad a \neq 1.$$

Vadinasi, $x = 2$ arba $x = \frac{2(a+1)}{a-1}$.

Išsprendę nelygybę

$$\frac{a+1}{a-1} < 0,$$

gauname, kad $a \in (-1; 1)$.

Ats.: $a \in (-1; 1)$.

2. Raskite mažiausią kvadratinio trinario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmę, jei kvadratinės lygties $x^2 + bx + c = 0$ sprendinių skirtumas lygus 7.

Sprendimas. Tegu x_1 ir x_2 , $x_1 > x_2$, yra kvadratinės lygties $x^2 + bx + c = 0$ sprendiniai.

Tada

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c, \quad x_1 - x_2 = 7.$$

Iš čia $x_1 = \frac{1}{2}(7-b)$, $x_2 = -\frac{1}{2}(7+b)$, $c = \frac{1}{4}(b^2 - 49)$.

Todėl

$$\begin{aligned} P(x) = x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \frac{1}{4}(b^2 - 49) = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}bx + \frac{1}{4}b^2 \right) - \frac{49}{4} = \\ &= \left(x + \frac{1}{2}b \right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4} = -12,25. \end{aligned}$$

Vadinasi, $\min P(x) = -12,25$ ir šią reikšmę $P(x)$ įgyja, kai $x = -\frac{1}{2}b$.

Ats.: $-12,25$.

3. Nustatykite, kuriai parametro a reikšmei esant kvadratinio trinario

$$x^2 + ax - 1 - a$$

šaknų (kvadratinės lygties $x^2 + ax - 1 - a = 0$ sprendinių) kvadratų suma yra pati mažiausia.

Pastaba. Kai diskriminantas lygus nuliui, kvadratinis trinaris turi dvi lygias šaknis, o kvadratinė lygtis – vieną sprendinį.

Sprendimas. Kvadratinio trinario $x^2 + ax - 1 - a$ diskriminantas

$$D = a^2 + 4(1+a) = (a+2)^2$$

yra teigiamas arba lygus nuliui skaičius esant bet kuriai parametro a reikšmei.

Pagal Vijeto teoremą (jei x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario šaknys),

$$x_1 + x_2 = -a \quad \text{ir} \quad x_1 \cdot x_2 = -(1+a).$$

O tada (skaičiuodami šaknų kvadratų sumą) gausime, kad

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 - 2 \cdot (-(1+a)) = a^2 + 2 + 2a = (a+1)^2 + 1 \geq 1,$$

o lygybė gaunama tik kai $a = -1$. Vadinas, kvadratinio trinomio $x^2 + ax - 1 - a$ šaknų kvadratų sumos pati mažiausia reikšmė yra 1 ir ji įgyjama esant parametro a reikšmei $a = -1$.

Ats.: $a = -1$.

4. Raskite visas sveikąsias parametro m reikšmes, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + 5mx + 84 = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Tegū x_1 ir x_2 yra lygties sprendiniai.

Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = -5m$ ir $x_1 \cdot x_2 = 84$.

Ieškant parametro m sveikųjų reikšmių, kurioms esant x_1 ir x_2 yra skirtingi sveikieji skaičiai, pakanka skaičių 84 išskaidyti pirminių daugiklių sandauga ($84 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7$) ir taikyti perrankos metodą. Tik derėtų turėti mintyje, kad abu sprendiniai (x_1 ir x_2) gali būti ir teigiami, ir neigiami skaičiai, bet abu – to paties ženklo. Aišku, pakanka išnagrinėti tik vieną atvejį.

Jei $x_1 = 1$, tai

$$x_2 = 84 \Rightarrow x_1 + x_2 = 85 \Rightarrow 5m = -85 \Rightarrow m = -17.$$

Jei $x_1 = 2$, tai

$$x_2 = 42 \Rightarrow x_1 + x_2 = 44 \Rightarrow 5m = -44 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$$

Jei $x_1 = 3$, tai

$$x_2 = 28 \Rightarrow 5m = -31 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$$

Jei $x_1 = 4$, tai

$$x_2 = 21 \Rightarrow 5m = -25 \Rightarrow m = -5.$$

Jei $x_1 = 6$, tai

$$x_2 = 14 \Rightarrow 5m = -20 \Rightarrow m = -4.$$

Jei $x_1 = 7$, tai

$$x_2 = 12 \Rightarrow 5m = -19 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$$

Prie gautų m reikšmių -17 , -5 ir -4 belieka prijungti teigiamas m reikšmes 4, 5, 17 ir parašyti galutinį atsakymą:

$$m \in \{-17; -5; -4; 4; 5; 17\}.$$

Ats.: $m \in \{-17; -5; -4; 4; 5; 17\}$.

5. Raskite parametrų p ir q reikšmių poras $(p; q)$, $p + q = 16$, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + px + q = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Tegū sveikieji skaičiai x_1 ir x_2 yra lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą,

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{ir} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Kadangi $p + q = 16$, tai

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 16.$$

Iš čia gauname:

$$(x_1x_2 - x_1) - (x_2 - 1) = 17,$$

$$x_1(x_2 - 1) - (x_2 - 1) = 17,$$

$$(x_2 - 1)(x_1 - 1) = 17.$$

Kadangi $x_1 - 1$ ir $x_2 - 1$ yra sveikieji skaičiai, sprendiniams x_1 ir x_2 rasti pakanka išspręsti šias dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1, \\ x_2 - 1 = 17 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x_1 - 1 = -1, \\ x_2 - 1 = -17. \end{cases}$$

Gauname, kad $x_1 = 2$, $x_2 = 18$ arba $x_1 = 0$, $x_2 = -16$. Todėl

$$p = -(2+18) = -20, \quad q = 2 \cdot 18 = 36 \quad \text{arba} \quad p = -(0-16) = 16, \quad q = 0 \cdot (-16) = 0.$$

Taigi ieškomos p ir q poros yra $(-20; 36)$ ir $(16; 0)$.

Ats.: $(-20; 36)$, $(16; 0)$.

6. Raskite visas parametro a reikšmes, kurioms esant lygtys

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{ir} \quad x - y = a$$

turi tik vieną bendrą sprendinį (realiųjų skaičių porą $(x; y)$, kuri tenkina ir pirmą, ir antrą lygtį).

Sprendimas. Aišku, kad turi būti $a \geq 0$. Nagrinėkime abiejų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (x - a)^2 = a, \\ y = x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2ax + a^2 - a = 0, \\ y = x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - ax + \frac{a^2 - a}{2} = 0, \\ y = x - a. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos matyti, kad ji gali turėti vienintelį sprendinį tik kai kvadratinės lygties

$$x^2 - ax + \frac{a^2 - a}{2} = 0, \quad a \geq 0,$$

diskriminantas $D = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - a}{2} = -a^2 + 2a$ lygus nuliui.

Taigi ieškomos parametro a reikšmės yra lygties

$$-a^2 + 2a = 0$$

sprendiniai $a = 0$ ir $a = 2$.

Ats.: 0 ir 2.

7. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybės

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

sprendinių nėra nei intervale $(-\infty; -1)$, nei intervale $(1; +\infty)$.

Sprendimas. Nagrinėtini du atvejai:

$$1) \begin{cases} a - x^2 > 0, \\ a + x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad 2) \begin{cases} a - x^2 < 0, \\ a + x - 2 > 0. \end{cases}$$

Abiem atvejais reikia turėti mintyje, kad $x \in [-1; 1]$.

Pirmu atveju:

$$\begin{cases} a - x^2 > 0, \\ a + x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > x^2 \geq 0, \\ a < 2 - x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (0; 1).$$

Antru atveju:

$$\begin{cases} a - x^2 < 0, \\ a + x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x^2 \leq 1, \\ a > 2 - x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

Taigi ieškomos parametro reikšmės sudaro intervalą $(0; 1)$.

Ats.: $a \in (0; 1)$.

8. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybės

$$ax^2 + (a - 1)x + a - 1 < 0, \quad a \neq 0,$$

sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

(1)

Sprendimas. Tegu A yra ieškomų parametro a reikšmių aibė.

Aišku, kad $a=1$ nepriklauso aibei A , nes nelygybė $x^2 < 0$ sprendinių neturi.

Jei $a \neq 1$, tai (1) nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$(a-1)\left(\frac{a}{a-1} \cdot x^2 + x + 1\right) < 0, \quad a \neq 0. \quad (2)$$

Atveju $a > 1$ turėtų būti

$$\frac{a}{a-1}x^2 + x + 1 < 0, \quad (3)$$

bet $x=0$ nėra (3) nelygybės sprendinys, todėl darome išvadą, kad didesnės už 1 parametro a reikšmės taip pat nepriklauso aibei A .

Jei $a \in (0; 1)$, tai $a-1 < 0$; todėl iš (2) išplaukia, kad turi galioti nelygybė $\frac{a}{a-1}x^2 + x + 1 > 0$; bet $x=-1$ nėra jos sprendinys. Vadinasi, intervalui $(0; 1)$ priklausančios a reikšmės nepriklauso aibei A .

Jei $a < 0$, tai ir $a-1 < 0$; todėl iš (2) nelygybės gauname ekvivalenčią nelygybę

$$\frac{a}{a-1}x^2 + x + 1 > 0.$$

O kad šios nelygybės sprendinių aibė būtų intervalas $(-\infty; +\infty)$ kvadratinio trinario

$$\frac{a}{a-1}x^2 + x + 1$$

diskriminantas D turėtų būti neigiamas. Spręsdami nelygybę $D < 0$, gauname:

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{a}{a-1} = \frac{3a+1}{1-a} < 0 \Rightarrow 3a+1 < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{3}.$$

Taigi, $A = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Ats.: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

9. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybė $y \geq x^2 + a$ turi vienintelį sprendinį $(x; y)$, jei $x \geq y^2 + a$.

Sprendimas. Nesunku suprasti, kad nelygybių sistemoje

$$\begin{cases} y \geq x^2 + a, \\ x \geq y^2 + a \end{cases} \quad (1)$$

sukeitus x ir y vietomis gaunama tokia pat sistema

$$\begin{cases} x \geq y^2 + a, \\ y \geq x^2 + a. \end{cases}$$

O tai reiškia, kad jei skaičių x_0 ir y_0 pora $(x_0; y_0)$ yra (1) sistemos sprendinys, tai pora $(y_0; x_0)$ taip pat yra jos sprendinys.

Pagal sąlygą, kiekviena parametro a reikšmė turi būti tokia, kad sprendinys $(x_0; y_0)$ būtų vienintelis. Vadinasi, turi galioti lygybė $y_0 = x_0$.

Irašę $y = x$ į (1) sistemą, gauname (2) nelygybę $x \geq x^2 + a$. Iš čia gauname:

$$x^2 - x + a \leq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} \leq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} - a.$$

Pastaroji nelygybė turi vienintelį sprendinį $x = \frac{1}{2}$, kai $a = \frac{1}{4}$. Taigi $a = \frac{1}{4}$ yra vienintelė parametro a reikšmė, kuriai esant nelygybė $y \geq x^2 + a$ turi vienintelį sprendinį (porą $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$), jei $x \geq y^2 + a$.

$$\text{Ats.: } \frac{1}{4}.$$

10. Raskite parametrų m ir n reikšmes, kurioms esant $x=2$ ir $x=3$ yra lygties $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ sprendiniai. Taip pat raskite trečią šios lygties sprendinį.

Sprendimas. Įrašę $x=2$, gauname lygtį (parametrų m ir n atžvilgiu) $4m + n = 10$, o įrašę $x=3$ – lygtį $9m + n = -15$.

Lygčių sistema

$$\begin{cases} 4m + n = 10, \\ 9m + n = -15 \end{cases}$$

turi tik vieną sprendinį $(m; n)$: $m = -5$, $n = 30$.

Vadinasi, tik lygtis

$$2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$$

turi sprendinius $x=2$ ir $x=3$.

Trečią sprendinį galima rasti išskiriant daugianaryje

$$2x^3 - 5x^2 - 13x + 30$$

daugiklius $x-2$ ir $x-3$. Darykime taip:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 &= (2x^3 - 4x^2) - (x^2 - 2x) - (15x - 30) = 2x^2(x-2) - x(x-2) - 15(x-2) = \\ &= (x-2)(2x^2 - x - 15) = (x-2)((2x^2 - 6x) + (5x - 15)) = (x-2)(2x(x-3) + 5(x-3)) = \\ &= (x-2)(x-3)(2x+5). \end{aligned}$$

Iš šio skaidinio lengva matyti, kad trečias lygties

$$2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$$

sprendinys yra $x = -2, 5$.

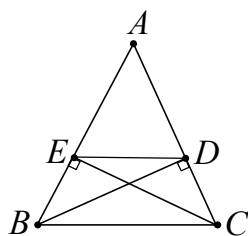
$$\text{Ats.: } m = -5, n = 30, x = -2, 5.$$

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

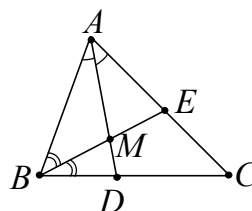
1. Lygiašonio trikampio ABC $AB = AC = 18$, $BC = 12$, atkarpos BD ir CE yra trikampio ABC aukštinės. Raskite atkarpos DE ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC šoninė krsaštinės $AB = AC = 18$, pagrindas $BC = 12$, atkarpos BD ir CE yra trikampio aukštinės (1 pav.). Iš trikampių BEC ir CDB lygumo išplaukia, kad $BE = CD$, taigi ir $AE = AD$, todėl trikampis ADE yra lygiašonis ir panašus į duotąjį trikampį. Iš panašumo gauname, kad $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$, taigi $ED = \frac{AE \cdot BC}{AB}$. Sakykime, kad $AE = x$, tuomet $EB = 18 - x$. Taikydami Pitagoro teoremą trikampiams AEC ir CBE gauname, kad $CE^2 = AC^2 - AE^2 = BC^2 - BE^2$, todėl $18^2 - x^2 = 12^2 - (18 - x)^2$. Iš šios lygties randame $x = AE = 14$, taigi $ED = \frac{14 \cdot 12}{18} = \frac{28}{3}$.

Atsakymas: $\frac{28}{3}$.



1 pav.



2 pav.

2. Trikampio kraštinių ilgiai $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$, jo pusiaukampinės AD ir BE susikerta taške M . Raskite atkarpų AM ir MD ilgius.

Sprendimas. Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $BD : DC = AB : AC = 6 : 8 = 3 : 4$, taigi $BD = \frac{3}{7}BC = 3$. Kadangi atkarpa BM yra trikampio ABD pusiaukampinė, tai $AM : MD = BA : BD = 6 : 3 = 2 : 1$, todėl $AM = \frac{2}{3}AD$, $MD = \frac{1}{3}AD$. Pagal Stiuarto formulę (arba pagal pusiaukampinės ilgio formulę) gauname, kad

$$AD^2 = \frac{1}{BC} (AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BC - BC \cdot BD \cdot DC) = \frac{1}{7} (6^2 \cdot 4 + 8^2 \cdot 3 - 7 \cdot 3 \cdot 4) = 36.$$

Taigi $AD = 6$, todėl $AM = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$, $MD = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

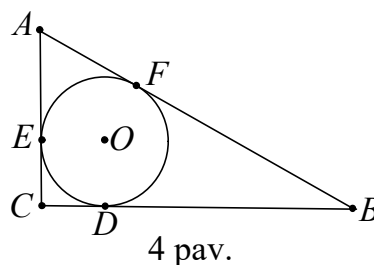
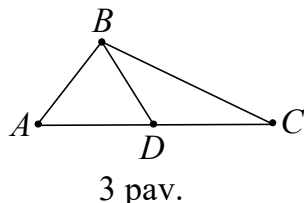
Atsakymas: 4 ir 2.

3. Trikampio ABC kraštinės AB ilgis lygus 2, pusiaukraštinės BD ilgis lygus 1, kampo BDA didumas lygus 30° . Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Trikampiu ABD (3 pav.) taikome sinusų teoremą ir gauname $\frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, todėl $\sin \angle A = \frac{BD \sin 30^\circ}{AB} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$. Iš kosinusų teoremos tam pačiam trikampiu turime, kad $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle BDA$, todėl $2^2 = AD^2 + 1^2 - 2AD \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Taigi gavome kvadratinę lygtį $AD^2 - \sqrt{3}AD - 3 = 0$, kurios teigiamasis sprendinys $AD = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$. Taigi trikampio ABD plotas $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15}) \cdot \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$. Kadangi pusiauakraštinė dalija trikampio plotą pusiau, tai ieškomasis trikampio plotas $S = 2S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$.

Atsakymas: $\frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$.



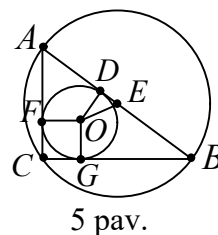
4. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas liečia vieną statinį taške, kuris dalija tą statinį į atkarpas, kurių ilgiai lygūs 6 ir 10. Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad į statųjį trikampį ABC , $\angle C = 90^\circ$ įbrėžtas apskritimas liečia statinį CB taške D , statinį CA - taške E , o įžambinę – taške F (4 pav.). Kadangi $CD = CE = p - AB$, $BD = BF = p - AC$, o $AC < AB$, tai $CD < BD$. Todėl $CD = CE = 6$, $BD = BF = 10$. Žymėdami $AE = AF = x$, iš Pitagoro teoremos gauname lygtį $16^2 + (x + 6)^2 = (x + 10)^2$. Šios lygties sprendinys $x = 24$, tuomet $AC = 24 + 6 = 30$, taigi ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 = 240$.

Atsakymas: 240.

5. Stačiojo trikampio statinių ilgiai lygūs 5 ir 12. Raskite atstumą tarp į trikampį įbrėžto ir apie trikampį apibrėžto apskritimų centrų.

Sprendimas. Nagrinėkime statųjį trikampį ABC , kurio statiniai $BC = 12$, $AC = 5$, tuomet jo įžambinė $AB = 13$. Sakykime, kad taškas O yra į statųjį trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras, tas apskritimas įžambinę AB liečia taške D , statinius AC ir BC – atitinkamai taškuose F ir G , o taškas E yra apibrėžto apie trikampį apskritimo centras – įžambinės vidurys (5 pav.). Kadangi $AD = AF = p - BC = \frac{1}{2}(5 + 12 + 13) - 12 = 3$, o keturkampis $CGOF$ yra kvadratas, tai įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys lygus atkarpos CF ilgiui, t. y. $OD = CF = 2$. Kadangi $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2}$, tai $ED = AE - AD = \frac{7}{2}$. Pagal Pitagoro teoremą stačiajame trikampyje ODE turime, kad ieškomasis atstumas $OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.



Atsakymas: $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 7$, $AC = 9$, $BC = 12$. Apskritimas liečia trikampio kraštinę BC taške D , kraštinės AB tęsinį – taške E , o kraštinės AC tęsinį – taške F . Raskite atkarpų EF ir ED ilgius.

Sprendimas. Kaip jau įrodyta, atkarpų AE ir AF ilgiai lygūs trikampio ABC pusperimetriui, taigi $AE = AF = \frac{1}{2}(7 + 9 + 12) = 14$. Lygiašonio trikampio AEF pagrindą EF galima rasti

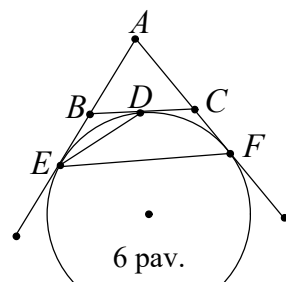
pagal kosinusų teoremą: $EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos \angle A = 2AE^2(1 - \cos \angle A)$.
 Kampu A kosinusą rasime, trikampiui ABC pritaikę kosinusų teoremą: $\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} =$

$$\frac{7^2 + 9^2 - 14^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = -\frac{1}{9}, \text{ todėl } EF^2 = 2 \cdot 14^2 \left(1 + \frac{1}{9}\right), EF = 14 \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{28\sqrt{5}}{3}.$$

Kadangi $BD = BE = AE - AB = 7$, o $\angle EBD = 180^\circ - \angle B$, tai

$$\cos \angle EBD = -\cos \angle B = -\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = -\frac{2}{3}.$$

Taikydami lygiašoniui trikampiui EBD kosinusų teoremą, gauname $ED^2 = BD^2 + BE^2 - 2 \cdot BD \cdot BE \cdot \cos \angle EBD = 2 \cdot 7^2 \left(1 + \frac{2}{3}\right)$, $ED = 7 \sqrt{\frac{10}{3}}$.

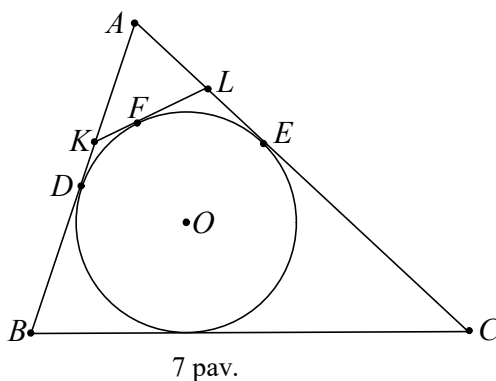


Atsakymas: $EF = \frac{28\sqrt{5}}{3}$, $ED = 7 \sqrt{\frac{10}{3}}$.

7. Į trikampį ABC , kurio kraštinių ilgiai $AB = 10, AC = 12, BC = 6$, įbrėžtas apskritimas. To apskritimo liestinė kerta kraštinę AB taške K , o kraštinę AC – taške L . Raskite trikampio AKL perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtas į trikampį ABC apskritimas kraštinę AB liečia taške D , kraštinę AC – taške E , o nubrėžtoji apskritimo liestinė jį liečia taške F . (7 pav.). Kaip buvo įrodyta, atkarpų AD ir AE ilgiai lygūs trikampio AKL pusperimetriui, taigi uždavinio sprendimas susiveda į šių atkarpų ilgių radimą. Pagal įbrėžtinio apskritimo savybes $AD = AE = p - BC$, čia $p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = 14$ – trikampio ABC pusperimetris. Taigi $AD = AE = 14 - 6 = 8$, todėl ieškomasis perimetras lygus 16.

Atsakymas: 16.



8. Trikampis ABC lygiašonis ($AB = BC$), atkarpos AA' ir BB' jo pusiau kampinės. Raskite trikampio kampus, jei $AB' = BA'$.

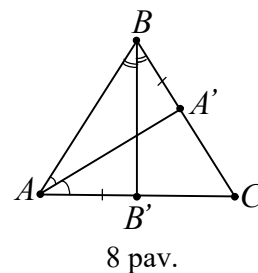
Sprendimas. Iš trikampio pusiau kampinių savybių išplaukia, kad $\frac{BA'}{AB} = \frac{BC - BA'}{AC}$ (8 pav.).

Kadangi $BC = AB$, o lygiašonio trikampio viršūnės kampo pusiau kampinė yra ir jo pusiau kampaštinė, tai $BA' = AB' = \frac{1}{2}AC$, todėl ši

lygybė virsta tokia $\frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC} - \frac{1}{2}$. Žymėdami $x = \frac{AC}{AB}$, gauname lygtį

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$, iš kurios seka kvadratinė lygtis $x^2 + x - 2 = 0$. Šios lygties

teigiamasis sprendinys yra $x = 1$, taigi $\frac{AC}{AB} = 1$, todėl $AC = AB = BC$, trikampis ABC lygiakraštis, jo kampai lygūs 60° .

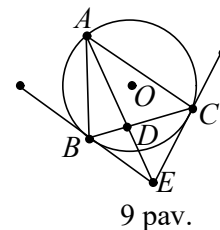


Atsakymas: $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

9. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo liestinės taškuose B ir C susikerta taške E , tiesės BC ir AE kertasi taške D . Raskite atkarpų BD ir CD ilgius, jei $AB = 16$, $AC = 12$, $BC = 15$.

Sprendimas. Pagal 4 pavyzdžio rezultatą gauname, kad tiesėje AE yra trikampio ABC simediana (9 pav.), todėl $BD : DC = AB^2 : AC^2 = 16^2 : 12^2 = 16 : 9$. Todėl $BD = \frac{16}{25}BC = \frac{16}{25} \cdot 15 = \frac{48}{5}$, $DC = \frac{9}{25}BC = \frac{27}{5}$.

Atsakymas: $BD = \frac{48}{5}$, $DC = \frac{27}{5}$.

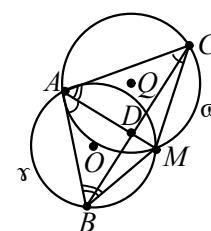


9 pav.

10. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$. Vienas apskritimas eina per taškus A ir B ir taške A liečia tiesę AC , kitas apskritimas eina per taškus A ir C ir taške A liečia tiesę AB . Tų apskritimų bendra styga kerta kraštinę BC taške D . Raskite santykį $BD : DC$.

Sprendimas. Sakykime, kad pirmasis apskritimas γ ir antrasis apskritimas ω susikerta taškuose A ir M (10 pav.). Kadangi tiesė AC yra apskritimo γ liestinė, tai pagal kampų tarp liestinės ir stygos savybę $\angle ABM = \angle CAM$. Analogiškai, tiesė AB yra apskritimo ω liestinė, todėl $\angle ACM = \angle MAB$. Iš 5 pavyzdžio seka, kad atkarpa AD , esanti tiesėje AM , yra trikampio ABC simediana. Todėl $BD : DC = AB^2 : AC^2 = 6^2 : 8^2 = 9 : 16$.

Atsakymas: $9 : 16$.



10 pav.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nubrėškite funkcijos $y = 2|x+3| - |2-x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

Sprendimas. Kadangi

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{jei } x+3 \geq 0; \\ -x-3, & \text{jei } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3, & \text{jei } x \geq -3; \\ -x-3, & \text{jei } x < -3, \end{cases}$$

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & \text{jei } 2-x \geq 0; \\ x-2, & \text{jei } 2-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & \text{jei } x \leq 2; \\ x-2, & \text{jei } x > 2, \end{cases}$$

tai

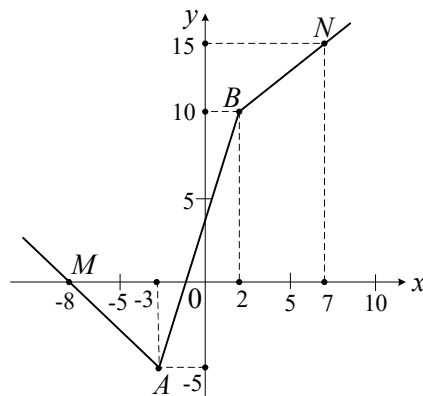
$$2|x+3| - |2-x| = \begin{cases} 2(-x-3) - (2-x), & \text{jei } x < -3; \\ 2(x+3) - (2-x), & \text{jei } -3 \leq x \leq 2; \\ 2(x+3) - (x-2), & \text{jei } x > 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x-8, & \text{jei } x < -3; \\ 3x+4, & \text{jei } -3 \leq x \leq 2; \\ x+8, & \text{jei } x > 2. \end{cases}$$

Vadinasi, funkcijos

$$y = 2|x+3| - |2-x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

grafikas yra laužtė, kurią sudaro tiesės $y = 3x+4$ atkarpa AB ir spinduliai AM bei BN , esantys atitinkamai tiesėse $y = -x-8$ ir $y = x+8$ (žr. 1 pav.).



1 pav.

2. Išspręskite lygtį

$$2|x+3| - |2-x| = a; \tag{1}$$

čia a yra bet koks realusis skaičius.

Sprendimas. Jau žinome (iš pirmo uždavinio), kad funkcijos $y = 2|x+3| - |2-x|$, $x \in (-\infty; +\infty)$, grafikas yra 1 paveiksle pavaizduota laužtė. Šį paveikslą papildykime tiesėmis $y = a$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $a \in \mathbb{R}$ (žr. 2 pav.).

Aišku, kad (1) lygties sprendinių aibę sudaro laužtės

$$y = 2|x+3| - |2-x|, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

ir tiesės $y = a$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $a \in \mathbb{R}$, susikirtimo taškų abscisės.

Taškas $A(-3; -5)$ yra tiesių $y = -x-8$ ir $y = 3x+4$ susikirtimo taškas, o $B(2; 10)$ yra tiesių $y = 3x+4$ ir $y = x+8$ susikirtimo taškas. Todėl gauname tris atvejus:

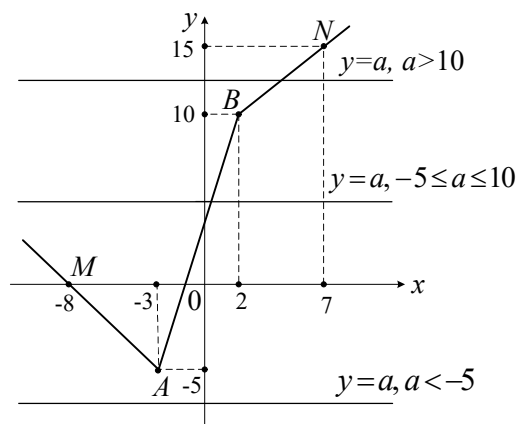
1) Jei $a < -5$, tai tiesė $y = a$ neturi bendrų taškų su laužte $y = 2|x+3| - |2-x|$. Tai reiškia, kad (1) lygtis sprendinių neturi.

2) Jei $a \in [-5; 10]$, tai tiesė $y = a$ su laužte $y = 2|x+3| - |2-x|$ susikerta dviejuose taškuose, kurių abscisės randamos iš lygčių $-x-8 = a$ ir $3x+4 = a$. Išsprendę jas, gauname $x = -a-8$ ir $x = \frac{1}{3}(a-4)$. Taigi aiveju $a \in [-5; 10]$ (1) lygtis turi du sprendinius: $x = -a-8$ ir $x = \frac{1}{3}(a-4)$.

3) Jei $a > 10$, tai iš lygčių $-x-8 = a$ ir $x+8 = a$ gauname dar du (1) lygties sprendinius:

$$x = -a-8 \text{ ir } x = a-8.$$

Ats.: 1) \emptyset , jei $a < -5$; 2) $-a-8$ ir $\frac{1}{3}(a-4)$, jei $a \in [-5; 10]$; 3) $-a-8$ ir $a-8$, jei $a > 10$.



2 pav.

3. Raskite nelygybės $2|x+3|-|2-x|>a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę.

Sprendimas. Kadangi lygties

$$2|x+3|-|2-x|=a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

sprendinių aibę jau žinome (žr. 2 užd.), tai iš karto pereikime prie (2) nelygybės sprendinių aibės sudarymo. Remdamiesi 2 paveikslu, gauname tris atvejus:

1) $x \in (-\infty; +\infty)$, jei $a < -5$;

2) $x \in (-\infty; -a-8)$ arba $x \in \left(\frac{1}{3}(a-4); +\infty\right)$, jei $a \in [-5; 10]$;

3) $x \in (-\infty; -a-8)$ arba $x \in (a-8; +\infty)$, jei $a > 10$.

Ats.: 1) $(-\infty; +\infty)$, jei $a < -5$; 2) $(-\infty; -a-8) \cup \left(\frac{1}{3}(a-4); +\infty\right)$, jei $a \in [-5; 10]$;

3) $(-\infty; -a-8) \cup (a-8; +\infty)$, jei $a > 10$.

4. Nubrėškite funkcijos $y=|x-1|-|x-2|+|x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

Sprendimas. Sugretinę išraiškas

$$|x-1|= \begin{cases} x-1, & \text{jei } x \geq 1; \\ 1-x, & \text{jei } x < 1, \end{cases} \quad |x-2|= \begin{cases} x-2, & \text{jei } x \geq 2; \\ 2-x, & \text{jei } x < 2, \end{cases} \quad \text{ir} \quad |x-3|= \begin{cases} x-3, & \text{jei } x \geq 3; \\ 3-x, & \text{jei } x < 3, \end{cases}$$

gauname, kad:

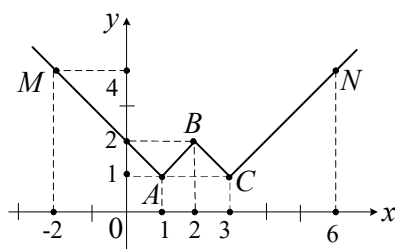
1) jei $x \in (-\infty; 1)$, tai $y = (1-x) - (2-x) + (3-x) = 2-x$;

2) jei $x \in [1; 2)$, tai $y = (x-1) - (2-x) + (3-x) = x$;

3) jei $x \in [2; 3)$, tai $y = (x-1) - (x-2) + (3-x) = 4-x$;

4) jei $x \in [3; +\infty)$, tai $y = (x-1) - (x-2) + (x-3) = x-2$.

Geometrinis šios funkcijos vaizdas (grafikas) yra 3 paveiksle pavaizduota laužtė. Taškų A , B ir C koordinatės yra atitinkamai $(1; 1)$, $(2; 2)$ ir $(3; 1)$.



3 pav.

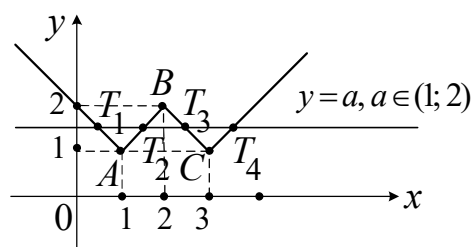
5. Raskite visas parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmes, kurioms esant lygtis

$$|x-1|-|x-2|+|x-3|=a \quad (3)$$

turi keturis sprendinius.

Sprendimas. Nesunku suprasti, kad visi (3) lygties sprendiniai yra 3 paveiksle pavaizduotos laužtės ir tiesės $y = a$, $x \in (-\infty; +\infty)$, susikirtimo taškų abscisės. Akivaizdu, kad keturis susikirtimo taškus gausime tik kai $a \in (1; 2)$.

Raskime (nors uždavinio sąlygoje nereikalaujama!) šių keturių taškų (4 paveiksle jie pažymėti T_1 , T_2 , T_3 ir T_4) abscisės, taigi (3) lygties sprendinius.



4 pav.

Taške T_1 tiesė $y = a$, $a \in (1; 2)$, susikerta su tiese $y = 2-x$ (žr. 4 užd. spr.), taške T_2 – su tiese $y = x$, taške T_3 – su tiese $y = 4-x$, o taške T_4 – su tiese $y = x-2$. Išsprendę lygtis

$$2-x=a, \quad x=a, \quad 4-x=a \quad \text{ir} \quad x-2=a,$$

gauname visus keturis (3) lygties sprendinius: $x = 2 - a$, $x = a$, $x = 4 - a$ ir $x = 2 + a$.

Ats.: $a \in (1; 2)$.

6. Raskite nelygybės $|x-1| - |x-2| + |x-3| < a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę. (4)

Sprendimas. Remiantis 5 uždavinio sprendimo rezultatais galima padaryti išvadą, kad atveju $a \in (1; 2)$ (4) nelygybės sprendinių aibė yra intervalų

$(2 - a; a)$ ir $(4 - a; 2 + a)$

sąjunga $(2 - a; a) \cup (4 - a; 2 + a)$.

Papildę 4 paveikslą tiesėmis $y = a$, $a < 1$; $y = 2$ ir $y = a$, $a > 2$ (žr. 5 pav.), gauname, kad (4) nelygybės sprendinių aibė yra:

1) \emptyset , jei $a \leq 1$; 2) $(0; 2) \cup (2; 4)$, jei $a = 2$; 3) $(2 - a; 2 + a)$, jei $a > 2$.

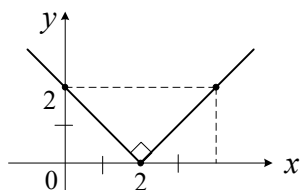
Ats.: \emptyset , jei $a \in (-\infty; 1]$; $(2 - a; a) \cup (4 - a; 2 + a)$, jei $a \in (1; 2]$; $(2 - a; 2 + a)$, jei $a \in (2; +\infty)$.

7. Raskite funkcijų $y = a|x|$ ir $y = |x-2|$ grafikų bendrų taškų skaičiaus priklausomybę nuo parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmės.

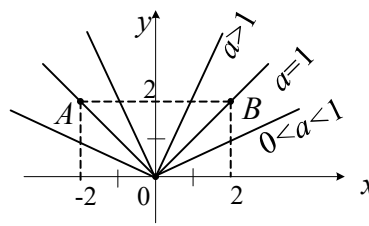
Sprendimas. Pagal modulio apibrėžimą,

$$y = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{jei } x \geq 2; \\ 2-x, & \text{jei } x < 2. \end{cases}$$

Funkcijos $y = |x-2|$ grafikas yra 6 paveiksle pavaizduota laužtė.



6 pav.



7 pav.

Jei $a < 0$, tai $y = a|x| < 0$, todėl atveju $a < 0$ abiejų funkcijų grafikai bendrų taškų neturi.

Jei $a = 0$, tai $y = a|x| \equiv 0$. Tiesė $y = 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$, su laužte $y = |x-2|$, $x \in (-\infty; +\infty)$, turi vieną bendrą tašką $(2; 0)$.

Atveju $a > 0$

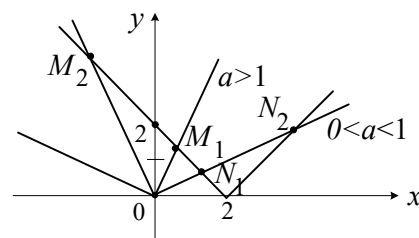
$$y = a|x| = \begin{cases} ax, & \text{jei } x \geq 0; \\ -ax, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

Funkcijos $y = a|x|$, $a > 0$, grafiko eskizas pavaizduotas 7 paveiksle.

Nesunku įsitikinti, kad laužtės $y = |x|$ ir $y = |x-2|$ susikerta viename taške.

Tuo tarpu atveju $a > 0$, $a \neq 1$, laužtės $y = a|x|$ ir $y = |x-2|$ susikerta dviejuose taškuose (žr. 8 pav.).

Ats.: 1) 0, jei $a < 0$; 2) 1, jei $a = 0$ arba $a = 1$; 3) 2, jei $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.



8 pav.

8. Nustatykite, ar funkcija $y = |x+10| + |x-10|$, $x \in \mathbb{R}$, yra lyginė.

Sprendimas. Žinome, kad turi galioti dvi sąlygos:

- 1) jei x yra funkcijos apibrėžimo aibės taškas, tai ir $-x$ yra šios aibės taškas;
- 2) $f(-x) = f(x)$ kiekviename funkcijos apibrėžimo aibės taške.

Pirma sąlyga yra akivaizdi. Patikrinkime antrą. Kadangi

$$f(x) = |x+10| + |x-10|, \text{ tai } f(-x) = |(-x)+10| + |(-x)-10|.$$

Remdamiesi skaičiaus modulio apibrėžimu, gauname, kad

$$|(-x) + 10| = |-x + 10| = (-1) \cdot (x - 10) = |-1| \cdot |x - 10| = |x - 10|$$

ir

$$|(-x) - 10| = |-x - 10| = (-1) \cdot (x + 10) = |-1| \cdot |x + 10| = |x + 10|.$$

Todėl $f(-x) = |x - 10| + |x + 10| = f(x)$. Belieka padaryti išvadą, kad funkcija

$$y = |x + 10| + |x - 10|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{yra lyginė.}$$

9. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| + |(5 + |x - 1|) - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| + ||x - 1|| = 1, \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| + |x - 1| = 1, \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| = \frac{1}{2}, \\ y = 5 + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \pm \frac{1}{2}, \\ y = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ arba } \frac{3}{2}, \\ y = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Gauname du lygčių sistemos sprendinius – realiųjų skaičių poras $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ ir $\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Ats.: $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

10. Išspręskite lygtį $3\sqrt{x-3} + |x-7| = 6$. (5)

Sprendimas. Pagal kvadratinės šaknies apibrėžimą gauname, kad $x \geq 3$, o pagal modulio apibrėžimą

$$|x - 7| = \begin{cases} x - 7, & \text{jei } x \geq 7; \\ 7 - x, & \text{jei } x < 7 \end{cases}$$

Vadinasi, intervale $[3; 7)$ reikia ieškoti lygties

$$3\sqrt{x-3} + (7-x) = 6, \tag{6}$$

o intervale $[7; +\infty)$ – lygties

$$3\sqrt{x-3} + (x-7) = 6 \tag{7}$$

sprendinių.

Spręsdami (6) lygtį, gauname:

$$3\sqrt{x-3} = x-1 \Rightarrow (3\sqrt{x-3})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 9(x-3) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ arba } x = 7.$$

Skaičius 4 priklauso intervalui $[3; 7)$, o 7 – nepriklauso. Bet $x = 7$ tenkina (7) lygtį, todėl irgi yra (5) lygties sprendinys.

Belieka rasti (7) lygties sprendinius intervale $[7; +\infty)$. Sutraukę panašiuosius narius, gauname ekvivalenčią lygtį

$$3\sqrt{x-3} = 13 - x.$$

Atidžiai išsižiūrėję, galėtume suprasti, kad šios lygties net nereikia spręsti, nes esant sąlygai $x > 7$ gautume, kad

$$3\sqrt{x-3} > 6 \text{ ir } 13 - x < 6.$$

Vadinasi, (7) lygtis neturi nė vieno sprendinio intervale $(7; +\infty)$.

Ats.: 4; 7.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Dėžėje yra 24 kg vinių. Kaip turint svirtines svarstyklas be svarelių ir rodyklių atmatuoti lygiai 9 kilogramus vinių?

Sprendimas. Padalinsime 24 kg vinių į dvi lygias dalis po 12 kg vinių kiekvienoje dalyje. Atidėsime vieną pusę į šoną, o kitus 12 kg vinių vėl padalinsime į dvi lygias dalis po 6 kg vinių kiekvienoje dalyje. Vieną 6 kg dalį atidėsime į šoną, o kitą 6 kg svorio dalį padalinsime į 2 lygias dalis po 3 kg vinių kiekvienoje dalyje. Taip padarę iš viso turėsime 4 krūveles vinių, sveriančių 12, 6, 3 ir 3 kilogramus. Supylę antrąją ir trečiąją krūveles į vieną ir gausime 9 kg svorio vinių krūvelę.

2. 4 vienodos konservų dėžutės ir 3 vienodi kepalai duonos sveria 5 kilogramus, o tos pačios 4 vienodos konservų dėžutės ir 2 vienodi kepalai duonos sveria 4 kilogramus. Kiek sveria 1 kepalas duonos ir kiek sveria 1 konservų dėžutė?

Sprendimas. Jeigu 1 konservų dėžutės svorį pažymėsime K , o 1 kepalio duonos svorį pažymėsime D , tai iš to, kas pasakyta sąlygoje, turėsime $4K + 3D = 5$ ir $4K + 2D = 4$. Atimdami antrąją lygybę iš pirmosios gausime $D = 1$, o tai reiškia, kad vienas kepalas duonos sveria 1 kg. Tačiau jeigu vienas kepalas duonos sveria 1 kilogramą, tai tada iš pirmosios lygybės turėsime, kad 4 konservų dėžutės sveria $5 - 3 = 2$ kilogramus, arba kad viena konservų dėžutė sveria $2 : 4 = \frac{1}{2}$ kilogramo.

Ats.: konservų dėžutė sveria $\frac{1}{2}$, o kepalas duonos – 1 kg.

3. Antanukui padovanojo svarstyklas, ir jis nedelsdamas pradėjo svėrinėti savo žaisliukus. Jo mašinėlę atsvėrė kamuoliukas ir 2 kubeliai, o mašinėlę su kubeliu – 2 kamuoliukai. Kiek kubelių atsvėrė 1 mašinėlę? Visi Antanuko kamuoliukai ir visi Antanuko kubeliai yra vienodi.

Sprendimas. Jeigu Antanuko mašinėlę pažymėtume M , kamuoliuką – Ka , o kubelį Ku , tai po Antanuko svėrimų turėtume svorių lygybes $M = Ka + 2Ku$ ir $M + Ku = 2Ka$. Įrašę pirmąją lygybę į antrąją gausime $Ka + 3Ku = 2Ka$. Nuskaitę iš abiejų pusių po 1 Ka gautume $3Ku = Ka$, o tada iš lygybės $M = Ka + 2Ku$ gauname $M = 3Ku + 2Ku = 5Ku$. Tai reiškia, jog 5 kubeliai atsvėria 1 mašinėlę.

Ats.: vieną mašinėlę atsvėria 5 kubeliai.

4. Turime 11 arbūzų ir dar svarstyklas, su kuriomis vienu svėrimu galime nustatyti bet kurių pasirinktų trijų arbūzų bendrą masę. Kaip šešiais svėrimais galima būtų nustatyti bendrą visų vienuolikos arbūzų masę?

Sprendimas. Pažymėkime tų 11 arbūzų svorį sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 11. Pirmuoju svėrimu pasverkime pirmuosius tris arbūzus 1, 2 ir 3, antruoju – sekančius tris arbūzus 4, 5 ir 6, o trečiuoju – dar kitus gretimus tris arba 7, 8 ir 9 arbūzus. Tegul jų bendrieji svoriai yra A , B ir C atitinkamai. Mums lieka dar trys svėrimai.

Ketvirtuoju svėrimu pasverkime 1, 10 ir 11 arbūzus, penktuoju 2, 10 ir 11, o šeštuoju – 3, 10 ir 11 arbūzus. Tegul jų bendrieji svoriai yra D , E ir F . Sudėję juos gauname, kad trigubas 10 bei trigubas 11 arbūzų svoris plius 1, 2 ir 3 arbūzų svoris A yra lygus arbūzų D , E ir F svorių sumai. Vadinas, trečdalis arbūzų svorių D , E ir F sumos $(D + E + F)/3$ yra lygus 10 ir 11 arbūzų bei trečdaliai pirmųjų trijų arbūzų (arba $A/3$) svorių sumai. Todėl visi 11 arbūzų kartu sveria

$$2A/3 + B + C + (D + E + F)/3.$$

4. Pasišaukė pamotė Pelenę ir tarė jai: „Į du mūsų kibirus telpa 5 ir 9 litrai vandens. Paėmusi juos atnešk iš upės lygiai 3 litrus vandens.“ Lentelę pateikite Pelenės užduoties atlikimo būdą.

Sprendimas.

5 litrai	9 litrai
0	9
5	4
0	4
4	0
4	9
5	8
0	8
5	3
0	3

6. Ar galima 50 litrų benzino išpilstyti per tris bakus taip, kad pirmame bake būtų 10 litrų daugiau benzino negu antrame bake, o perpylus 26 litrus benzino iš pirmojo bako į trečiąjį, trečiajame bake būtų tiek pat benzino, kiek jo yra antrajame bake? Atsakymą paaiškinkite.

Sprendimas. Deja, to padaryti neįmanoma, nes jeigu tai būtų galima, tai iš pirmojo bako perpylus į trečiąjį 26 litrus, trečiajame inde būtų bent 26 litrai, o kadangi tada ir antrajame inde benzino būtų bent 26 litrai, tai per visus tris indus benzino susirinktų bent 52 litrai, o tai jau yra daugiau negu 50 litrų, esančių pagal sąlygą visuose 3 induose.

Ats.: to padaryti negalima.

7. Dvylikos litrų talpos indas yra sklidinai pripiltas pieno. Kaip būtų galima šį pieną padalinti po lygiai dviem pirkėjams, naudojantis dviem tuščiomis talpomis, viena iš kurių yra 8, o kita 3 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentelę.

Sprendimas.

12 litrų talpa	8 litrų talpa	3 litrų talpa
12	0	0
9	0	3
9	3	0
6	3	3
6	6	0

8. Yra trys indai, kurių talpa yra 8 litrai, 5 litrai ir 3 litrai. 8 litrų indas yra sklidinai pripiltas vandens. Kaip perpilti vandenį į du iš trijų turimų indų, kad kiekviename iš jų būtų po 4 litrus vandens? Sprendimą pateikite lentelė.

Sprendimas.

8 litrų indas	5 litrų indas	3 litrų indas
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

9. Kaip turint dvi pilnas 10-ties litrų talpas su pienu, atmatuoti po 2 litrus pieno į dvi tuščias talpas, iš kurių viena yra 4, o kita 5 litrų talpos? Sprendimą pateikite lentelė.

Sprendimas. Nurodysime vieną galimą sprendimo būdą.

4 litrų talpos indas	5 litrų talpos indas	10 litrų talpos indas	10 litrų talpos indas
0	0	10	10
0	5	5	10
4	1	5	10
0	1	9	10
1	0	9	10
1	5	4	10
4	2	4	10
0	2	8	10
4	2	8	6
2	2	10	6

10. Turime 79 vienodas monetas, iš kurių viena yra netikra ir lengvesnė už kitas. Kaip turint svirtines svarstyklės be svarelių ir padarius daugių daugiausiai 4 svėrimus surasti tą netikrą monetą?

Sprendimas. Padaliname tas monetas į tris grupes po 27 monetas pirmosiose dviejose ir 25 monetas trečiojoje grupėje ir pirmuoju svėrimu svirtinėmis svarstyklėmis palyginame pirmųjų dviejų grupių svorį. Jeigu svarstyklės rodo pusiausvyrą, tai netikra moneta yra trečiojoje 25 monetų grupėje. O jeigu svarstyklės pusiausvyros nerodo, tai netikra moneta yra ten, kur svarstyklių lėkštutė yra iškilusi aukštyn. Taigi turime atvejį su 27 monetomis, iš kurių yra netikra. Šis atvejis yra iš esmės mums pažįstamas, nes toliau mes dalinsime tas 27 monetas į tris trejetus po 9 monetas ir dėsime ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštucių po devynias monetas ir taip nustatysime, kuriame gi devynete yra netikra moneta. Toliau tą devynetą, kuriame yra netikra moneta, dalinsime į tris trejetus po tris monetas ir trečiuoju svėrimu nustatysime, kuriame gi trejete yra ta netikra moneta. Po to to trejeto pirmą ir antrą monetą vėl dėsime ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštucių ir taip ketvirtuoju svėrimu reikalus baigsime ir taip tą netikrą monetą surasime. Liko išnagrinėti atvejį, kai netikra moneta yra trečiojoje 25 monetų grupėje. Jeigu taip nutinka, tai antram svėrimui jas bet kaip daliname į tris grupes – pirmosiose dviejose po 9, o trečiojoje – 7 monetas ir pirmąsias dvi grupes dedame ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštucių. Jei svarstyklės pusiausvyroje, tai netikra moneta yra trečiojoje grupėje tarp 7 monetų, o jeigu pusiausvyros nėra, tai netikra moneta yra vienoje 9 monetų grupėje ir tokį atvejį mes tęsiame toliau dalindami trejetais. Liko išnagrinėti 7 monetų atvejį. Tada mes daliname į dvi grupes po 3 ir dar vieną grupę po 1 monetą ir ant skirtingų svarstyklių lėkštucių dedame abi grupes po 3 monetas. Jeigu yra pusiausvyra, tai netikra yra 7-ta moneta ir pastebime, kad mes sutaupėme vieną svėrimą, nes mums tokiu atveju pakanka trijų svėrimų. Jeigu pusiausvyros nėra, tai netikra moneta atsiduria tarp 3 lengvesnių monetų ir tada ketvirtuoju svėrimu ant lėkštucių palyginus bet kurias dvi iš jų reikalai pasibaigia.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Raskite aritmetinės progresijos a_1, a_2, a_3, \dots pirmųjų devyniolikos narių sumą, jeigu

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

Sprendimas. Kadangi

$$a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12},$$

tai $(a_4 + a_{16}) + (a_8 + a_{12}) = 224 \Rightarrow a_1 + a_{19} = \frac{1}{2} \cdot 224 = 112.$

Todėl

$$S_{19} = \frac{1}{2} \cdot 112 \cdot 19 = 1064.$$

Ats.: 1064.

2. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) – jos pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jei galioja šios dvi sąlygos:

$$a_1 + a_3 + a_5 = -12 \quad \text{ir} \quad a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80.$$

Sprendimas. Kadangi

$$a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2(a_1 + 2d) = 2a_3,$$

tai $a_1 + a_3 + a_5 = -12 \Rightarrow 3a_3 = -12 \Rightarrow a_3 = -4.$

Todėl

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12, \\ a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_5 = -8, \\ a_1 \cdot a_5 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = -a_1 - 8, \\ a_1(a_1 + 8) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = -a_1 - 8, \\ a_1^2 + 8a_1 = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 = -a_1 - 8, \\ (a_1 + 4)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = -a_1 - 8, \\ a_1 + 4 = \pm 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = -a_1 - 8, \\ a_1 = -4 \pm 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -10, a_5 = 2 \quad \text{arba} \quad a_1 = 2, a_5 = -10.$$

Kadangi $a_5 = a_1 + 4d$, tai pirmu atveju gauname $d = 3$, o antru – $d = -3$.

Ats.: $a_1 = -10, d = 3$ arba $a_1 = 2, d = -3$.

3. Aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų m narių suma S_m yra lygi jos pirmųjų k narių sumai S_k , $k \neq m$. Įrodykite, kad šiuo atveju

$$S_{m+k} = 0.$$

Įrodymas. Tegū $m > k$. Tada

$$S_m = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_m) = S_k + (a_{k+1} + \dots + a_m).$$

Pagal sąlygą, $S_m = S_k$, todėl

$$a_{k+1} + \dots + a_m = 0 \Rightarrow \frac{a_{k+1} + a_m}{2} \cdot (m - k) = 0 \Rightarrow a_{k+1} + a_m = 0 \quad (\text{nes } m - k \neq 0).$$

Remdamiesi aritmetinės progresijos apibrėžimu tada gauname, kad

$$a_k + a_{m+1} = a_{k-1} + a_{m+2} = \dots = a_1 + a_{m+k} = 0.$$

Vadinasi,

$$S_{m+k} = \frac{a_1 + a_{m+k}}{2} \cdot (m + k) = 0.$$

4. Raskite aritmetinę progresiją (a_n) , kurios pirmųjų n narių suma S_n apskaičiuojama pagal formulę

$$S_n = 24n^2 + 17n. \quad (1)$$

Sprendimas. Remdamiesi (1) formule gauname, kad

$$a_1 = S_1 = 24 + 17 = 41,$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (24 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2) - 41 = 96 + 34 - 41 = 89;$$

todėl $d = a_2 - a_1 = 89 - 41 = 48$.

Vadinasi, ieškomos aritmetinės progresijos pirmas narys yra $a_1 = 41$, o skirtumas $d = 48$; todėl bendrasis narys yra

$$a_n = 41 + 48(n-1) = 48n - 7.$$

Na, o skaičiuodami pirmųjų n narių sumą S_n gautume, kad

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{41 + (48n - 7)}{2} \cdot n = \frac{48n + 34}{2} \cdot n = (24n + 17)n = 24n^2 + 17n.$$

Ats.: (a_n) , $a_n = 48n - 7$.

5. Įrodykite, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija, jeigu jos pirmųjų n narių sumos S_n formulė yra

$$S_n = An^2 + Bn; \quad (1)$$

čia A ir B yra bet kurie realieji skaičiai, $A \neq 0$.

Įrodymas. Aišku, kad sekos (a_n) pirmas narys yra

$$a_1 = S_1 = A + B,$$

o antras narys yra

$$a_2 = S_2 - S_1 = (4A + 2B) - (A + B) = 3A + B.$$

Todėl

$$a_2 - a_1 = (3A + B) - (A + B) = 2A.$$

Belieka įsitikinti, kad toks pat skirtumas yra ir tarp bet kurių kitų sekos (a_n) gretimų narių. Skaičiuodami gauname (kai $n \geq 2$):

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} = \\ &= (A(n+1)^2 + B(n+1)) - 2(An^2 + Bn) + (A(n-1)^2 + B(n-1)) = \\ &= A((n+1)^2 - 2n^2 + (n-1)^2) + B(n+1 - 2n + n-1) = \\ &= A(n^2 + 2n + 1 - 2n^2 + n^2 - 2n + 1) = 2A. \end{aligned}$$

Matome, kad seka (a_n) , tenkinanti (1) sąlygą, nusakoma formule

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad d = 2A;$$

todėl yra aritmetinė progresija.

6. Nustatykite, ar yra tokia aritmetinė progresija (a_n) , kad pirmųjų n narių sumai rasti tiktą formulę

$$S_n = n^2 + 2n - 8,$$

jei n – bet kuris natūralusis skaičius.

Sprendimas. Aišku, kad

$$a_1 = S_1 = -5,$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 0 - (-5) = 5.$$

Todėl ieškomos progresijos (a_n) skirtumas turėtų būti $d = a_2 - a_1 = 10$, o bendrasis narys

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1) \cdot 10 = 10n - 15.$$

Taikydami sumos formulę

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

gautume, kad $S_n = (5n - 10)n = 5n^2 - 10n$.

Šį rezultatą sugretinę su formule $S_n = n^2 + 2n - 8$, gautume, kad

$$(5n^2 - 10n) - (n^2 + 2n - 8) = 4n^2 - 12n + 8 \neq 0.$$

Vadinasi, uždavinio sąlygą tenkinančios aritmetinės progresijos nėra.

Ats.: Nėra.

7. Trijų skaičių, sudarančių geometrinę progresiją, suma lygi 3, o jų kvadratų suma 21. Raskite šią progresiją.

Sprendimas. Tegū b_1 , b_2 ir b_3 yra ieškomi skaičiai. Pagal sąlygą,

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3 \quad \text{ir} \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 21.$$

Kadangi $b_2 = b_1q$ ir $b_3 = b_1q^2$, tai

$$b_1 + b_2 + b_3 = b_1(1 + q + q^2)$$

ir

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= b_1^2(1 + q^2 + q^4) = b_1^2((1 + 2q^2 + q^4) - q^2) = b_1^2((1 + q^2)^2 - q^2) = \\ &= b_1^2(1 + q^2 - q)(1 + q^2 + q) = (b_1(1 + q + q^2)) \cdot b_1(1 - q + q^2) = 3b_1(1 - q + q^2) = \\ &= 3b_1((1 + q + q^2) - 2q) = 3b_1(1 + q + q^2) - 6b_1q = 9 - 6b_1q. \end{aligned}$$

Todėl sprenddami lygčių

$$b_1(1 + q + q^2) = 3 \quad \text{ir} \quad 9 - 6b_1q = 21$$

sistemą gauname:

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{2}{q}, \\ -\frac{2}{q}(1 + q + q^2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{2}{q}, \\ -2(1 + q + q^2) = 3q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{2}{q}, \\ 2q^2 + 5q + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{2}{q}, \\ q = \frac{-5 \pm 3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = -2, b_1 = 1 \quad \text{arba} \quad q = -\frac{1}{2}, b_1 = 4.$$

Vadinasi, yra dvi geometrinės progresijos, kurios atitinka uždavinio sąlygą:

$$1) 1; -2; 4 \quad \text{ir} \quad 2) 4; -2; 1.$$

Ats.: 1; -2; 4 arba 4; -2; 1.

8. Skaičių 180 išskaidykite į keturis dėmenis taip, kad jie sudarytų geometrinę progresiją, kurios trečias narys 36 vienetais didesnis už pirmą narį.

Sprendimas. Tegū b_1 , b_2 , b_3 , b_4 yra ieškomi dėmenys ir $0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4$. Kadangi $b_3 = b_1 + 36 > b_1$, tai progresijos vardiklis q turėtų būti didesnis už 1. Be to,

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_1 + b_1q + (b_1 + 36) + (b_1 + 36)q = 2b_1 + 2b_1q + 36q + 36 = 2b_1(q + 1) + 36(q + 1).$$

Todėl sprenddami lygčių

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 180 \quad \text{ir} \quad b_3 = b_1 + 36$$

sistemą gauname:

$$\begin{cases} 2b_1(q+1)+36(q+1)=180, \\ b_1q^2=b_1+36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q+1)+18(q+1)=90, \\ b_1(q^2-1)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{q^2-1} \cdot (q+1)+18(q+1)=90, \\ b_1(q^2-1)=36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{q-1}+q+1=5, \\ b_1(q^2-1)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+(q^2-1)=5(q-1), \\ b_1(q^2-1)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2-5q+6=0, \\ b_1(q^2-1)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2 \text{ arba } q=3, \\ b_1=\frac{36}{q^2-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q=2, b_1=12 \text{ arba } q=3, b_1=4,5.$$

Taigi $180=12+24+48+96$ arba $180=4,5+13,5+40,5+121,5$.

Ats.: $12+24+48+96$ arba $4,5+13,5+40,5+121,5$.

9. Raskite aritmetinės progresijos (a_n) pirmą narį a_1 ir skirtumą d , jeigu $S_{10}=300$, o jos nariai a_1, a_2 ir a_5 sudaro geometrinę progresiją.

Sprendimas. Iš sąlygos $S_{10}=300$ gauname:

$$\frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10=300 \Rightarrow a_1+a_{10}=60 \Rightarrow 2a_1+9d=60. \quad (1)$$

Pagal sąlygą, a_1, a_2 ir a_5 sudaro geometrinę progresiją. Todėl $a_1 \neq 0$ ir

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_5}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1+d}{a_1} = \frac{a_1+4d}{a_1+d} \Rightarrow 1+\frac{d}{a_1} = 1+\frac{3d}{a_1+d} \Rightarrow \frac{d}{a_1} = \frac{3d}{a_1+d}. \quad (2)$$

Jei $d=0$, tai (1) $\Rightarrow a_1=30$.

$$\text{Jei } d \neq 0, \text{ tai (2) } \Rightarrow \frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_1+d} \Rightarrow a_1+d=3a_1 \Rightarrow d=2a_1.$$

Šiuo atveju iš (1) gauname, kad $a_1=3$ ir $d=6$.

Ats.: $a_1=30, d=0$ arba $a_1=3, d=6$.

10. Geometrinę progresiją (b_n) sudaro lyginis narių skaičius. Raskite šios progresijos vardiklį q , jei suma S_n yra tris kartus didesnė už nelyginėse pozicijose esančių narių $b_1, b_3, b_5, \dots, b_{n-1}$ suma.

Sprendimas. Iš sąlygos išplaukia, kad $b_1 \neq 0$ ir $q \neq 1$.

Pagal sąlygą,

$$S_n = 3(b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1}), \quad n = 2m. \quad (1)$$

Aišku, kad seka $b_1, b_3, b_5, \dots, b_{n-1}$ yra geometrinė progresija, kurios pirmas narys yra b_1 , o vardiklis q^2 . Vadinasi,

$$b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1} = \frac{b_1((q^2)^m - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1(q^{2m} - 1)}{q^2 - 1}. \quad (2)$$

Kadangi $S_n = \frac{b_1(q^{2m} - 1)}{q - 1}$, tai iš (1) ir (2) gauname:

$$\frac{b_1(q^{2m} - 1)}{q - 1} = 3 \cdot \frac{b_1(q^{2m} - 1)}{q^2 - 1} \Rightarrow 1 = 3 \cdot \frac{1}{q + 1} \Rightarrow q = 2.$$

Ats.: $q = 2$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

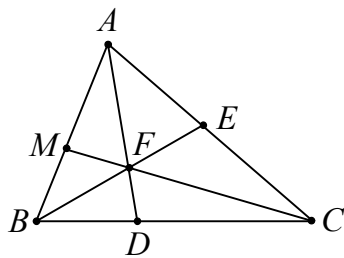
1. Trikampio ABC kratinių ilgiai $AB = 4, BC = 5, AC = 6$, atkarpa AD yra pusiauakampinė, atkarpa BE yra pusiauakraštinė. Raskite į kokio ilgio atkarpa kraštinę AB dalija per atkarpų AD ir BE sankirtos tašką ir viršūnę C nubrėžta tiesė.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos AD ir BE susikerta taške F , o tiesė CF kerta kraštinę AB taške M (1 pav.). Pagal trikampio pusiauakampinės savybę $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Pagal Čevos teoremą $\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$. Kadangi taškas E yra kraštinės AC vidurio taškas, tai $\frac{AE}{EC} = 1$, todėl $\frac{BM}{MA} = \frac{DB}{CD} = \frac{2}{3}$. Iš čia išplaukia, kad $BM = \frac{2}{5}BA = \frac{8}{5}$, o $MA = \frac{3}{5}BA = \frac{12}{5}$.

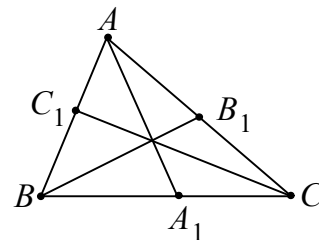
Atsakymas: $\frac{8}{5}$ ir $\frac{12}{5}$.

2. Atkarpa, jungianti trikampio ABC viršūnę A su tokiu kraštinės BC tašku A_1 kad laužtės ABA_1 ilgis yra lygus trikampio perimetro pusei, vadinama trikampio perimetrise. Įrodykite, kad trikampio perimetrisės susikerta viename taške (Nagelio taškas, Christian Heinrich von Nagel, 1803 – 1882, vokiečių matematikas).

Sprendimas. Sakykime, kad taškai A_1, B_1, C_1 yra tokie, kad atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC perimetrisės (2 pav.). Kadangi laužtės ABA_1 ilgis lygus trikampio pusperimetriui $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, tai $BA_1 = p - AB = p - c$, o $CA_1 = p - AC = p - b$. Tuomet $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{p-c}{p-b}$. Analogiškai $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p-a}{p-c}$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-b}{p-a}$. Kadangi $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-b} = 1$, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.



1 pav.

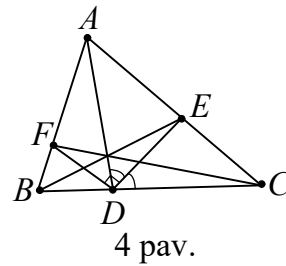
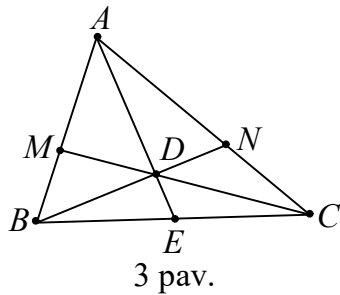


2 pav.

3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad tiesės MN ir BC yra lygiagrečios. Tiesės BN ir CM kertasi taške D , tiesės AD ir BC kertasi taške E . Raskite santykį $BE : EC$.

Sprendimas. Kadangi atkarpos BN, CM ir AE kertasi viename taške D , tai pagal Čevos teoremą teisinga lygybė $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$ (3 pav.). Kadangi tiesės MN ir BC yra lygiagrečios, tai pagal Talio teoremą $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Tuomet $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$, taigi $\frac{BE}{EC} = 1$.

Atsakymas: 1.



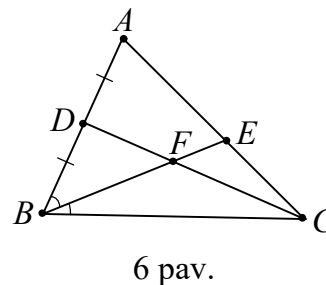
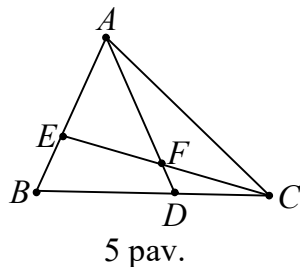
4. Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje BC , atkarpa DE yra trikampio ADC pusiaukampinė, kraštinėje AB yra toks taškas F , kad atkarpos DF ir DE yra statmenos. Įrodykite, kad atkarpos AD , BE ir CF susikerta viename taške.

Sprendimas. Kadangi atkarpa DE yra trikampio ADC pusiaukampinė, tai pagal pusiaukampinės savybę $\frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AD}$. Kadangi greturinių kampų pusiaukampinės yra statmenos, tai atkarpa DF yra trikampio ABD pusiaukampinė (4 pav.), todėl $\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BD}$. Atsižvelgę į šias lygybes, gauname, kad $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} = 1$, todėl pagal Čevos teoremą atkarpos AD , BE ir CF susikerta viename taške.

5. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AB yra tokie taškai D ir E , kad $BD : DC = 5 : 3$, $AE : EB = 3 : 2$. Atkarpos AD ir CE susikerta taške F . Raskite santykius $CF : FE$ ir $AF : FD$.

Sprendimas. Nagrinėkime trikampį BEC ir tris tiesės taškus A, F, D , iš kurių du taškai F ir D yra šio trikampio kraštinėse, o taškas A – kraštinės EB tęsinyje (5 pav.). Šiam trikampiui ir taškams taikome Menelajo teoremą: $\frac{CF}{FE} \cdot \frac{EA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$. Kadangi $\frac{EA}{AB} = \frac{3}{5}$, $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{3}$, tai $\frac{CF}{FE} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$, iš čia $\frac{CF}{FE} = 1$. Analogiškai taikome Menelajo teoremas trikampiui ABD ir tiesės taškams C, F, E : $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$. Kadangi $DC : CB = 3 : 8$, $BE : EA = 2 : 3$, tai $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 1$, todėl $\frac{AF}{FD} = 4$.

Atsakymas: $CF : FE = 1 : 1$, $AF : FD = 4 : 1$.



6. Trikampio ABC kraštinių ilgių $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 15$. Raskite, koku santykiu trikampio pusiauokraštinė CD dalija jo pusiaukampinę BE .

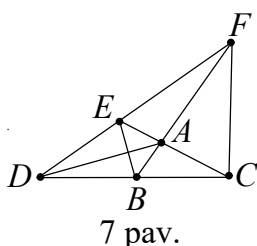
Sprendimas. Sakykime, kad trikampio ABC pusiauokraštinė CD ir jo pusiaukampinė BE susikerta taške F (6 pav.). Trikampiui AEB ir tiesės taškams C, F, D taikome Menelajo teoremą:

$\frac{BF}{FE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$. Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, todėl $\frac{EC}{CA} = \frac{3}{5}$. Kadangi CD – pusiauakraštinė, tai $\frac{AD}{DB} = 1$. Taigi $\frac{BF}{FE} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 = 1$, o $\frac{BF}{FE} = \frac{5}{3}$.

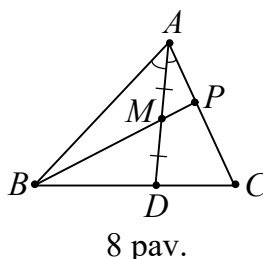
Atsakymas: $BF : FE = 5 : 3$.

7. Trikampis ABC yra įvairiakraštis, kampo A priekampio pusiaukampinė tiesę BC kerta taške D , kampo B priekampio pusiaukampinė kerta tiesę AC taške E , o kampo C priekampio pusiaukampinė tiesę AB kerta taške F . Įrodykite, kad taškai D, E ir F yra vienoje tiesėje.

Sprendimas. Kadangi AD, BE ir CF yra trikampio priekampių pusiaukampinės (7 pav.), tai $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB}$. Todėl $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$, taigi pagal Menelajo teoremą taškai D, E ir F yra vienoje tiesėje.



7 pav.



8 pav.

8. Trikampyje ABC teisinga lygybė $AB : AC = 20 : 11$, atkarpa AD yra jo pusiaukampinė, taškas M yra jos vidurys. Koku santykiu tiesė BM dalija trikampio kraštinę AC ?

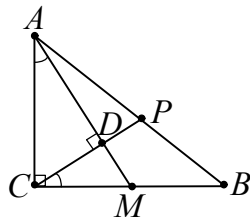
Sprendimas. Sakykime, kad tiesės AC ir BM kertasi taške P (8 pav.). Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $BD : DC = AB : AC = 20 : 11$, todėl $BD : BC = 20 : 31$. Trikampiai ADC ir tiesės taškams B, M, P taikome Menelajo teoremą: $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DM}{MA} = 1$. Įrašę santykių reikšmes $\frac{CB}{BD} = \frac{31}{20}$, $\frac{DM}{MA} = 1$, gauname, kad $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{31}{20} \cdot 1 = 1$, taigi ieškomasis santykis $\frac{AP}{PC} = \frac{20}{31}$.

Atsakymas: $\frac{20}{31}$.

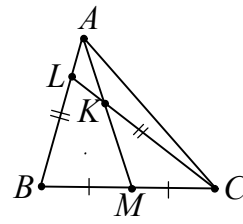
9. Taškas M yra stačiojo lygiašonio trikampio ABC statinio BC vidurys, iš stačiojo kampo viršūnės C nubrėžtas statmuo pusiauakraštinei AM kerta įžambinę AB taške P . Raskite trikampio statinio AC ilgį, jei $PB = \sqrt{2}$.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos AM ir CP kertasi taške D (9 pav.). Iš stačiųjų trikampių ADC ir MDC turime, kad $AD = CD \operatorname{ctg} \angle CAD$, $MD = CD \operatorname{tg} \angle MCD$. Kadangi $CD = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} AC$, o $\angle CAD = \angle MCD = 90^\circ - \angle ACD$, tai $\frac{AD}{DM} = \frac{CD \operatorname{ctg} \angle CAD}{CD \operatorname{tg} \angle MCD} = \frac{\operatorname{ctg} \angle CAD}{\operatorname{tg} \angle CAD} = (\operatorname{ctg} \angle CAD)^2 = (\operatorname{ctg} \angle CAM)^2 = \frac{AC^2}{CM^2} = 4$. Trikampiai ABM ir tiesės taškams C, D, P taikome Menelajo teoremą: $\frac{AD}{DM} \cdot \frac{MC}{CB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$. Įrašę žinomus santykius $\frac{AD}{DM} = 4$, $\frac{MC}{CB} = \frac{1}{2}$, gauname, kad $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$, todėl $\frac{BP}{PA} = \frac{1}{2}$. Iš čia $PA = 2BP = 2\sqrt{2}$, todėl $AB = AP + PB = 3\sqrt{2}$, o tai reiškia, kad trikampio statinis $AC = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = 3$.

Atsakymas: 3.



9 pav.



10 pav.

10. Trikampio ABC pusiauokraštinėje AM yra toks taškas K , kad $CK = AB$, tiesės CK ir AB susikerta taške L . Įrodykite, kad trikampis AKL yra lygiašonis.

Sprendimas. Trikampiai LBC ir tiesės taškams A, K, M (10 pav.) taikome Menelajo teoremą:
 $\frac{CK}{KL} \cdot \frac{LA}{AB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$. Kadangi $CK = AB$, o $BM = MC$, tai iš šios lygybės išplaukia, kad $\frac{LA}{KL} = 1$.
 Taigi $LA = KL$, ką ir reikėjo įrodyti.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$a = -4$	8 cm, 15 cm	100	Pavyzdžiui, 2, $5^{11} + 36^{12}$, $6^{89} - 5^{77}$