

74-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

2026 m. balandžio 3 d., Kaunas

9–10 klasės

1. Lentoje užrašyti tokie trys skirtingi teigiami realieji skaičiai x, y, z , kad skaičiai xy, yz, zx ir $x^n + y^n + z^n$ yra racionalieji. Nustatykite, ar būtinai visi trys skaičiai x, y, z yra racionalieji, kai a) $n = 4$; b) $n = 3$.

2. Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas toks taškas D , kad $AB = AD$ (čia $D \neq B$). Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiauokampinė. Ji yra tokioje ilgesnėje atkarpoje AE , kad $\angle ABD + \angle ABE = 180^\circ$. Įrodykite, kad $AB \cdot CE = AE \cdot BD$.

3. Lentoje užrašytas skaičius 1. Pasirinkę natūralųjį skaičių n , žaidėjai A ir B žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis atlieka ėjimus: A atlieka savo pirmąjį ėjimą, tada B – savo pirmąjį ėjimą, ir t. t. Savo k -tojo ėjimo metu ($k = 1, 2, 3, \dots$) žaidėjas turi pasirinkti skaičių b – bet kurį iš skaičių $1, 2, 3, \dots, 2k$, nutrinti tuo metu lentoje užrašytą skaičių a ir vietoj jo užrašyti sumą $a + b$. Kaskart žaidėjui B atlikus savo k -tąjį ėjimą, kai $k = 10, 11, 12, \dots$, žaidėjas A nusprendžia, ar sustabdyti žaidimą. Žaidėjas A turi sustabdyti žaidimą ne vėliau nei po žaidėjo B šimtojo ėjimo. Jei sustabdžius žaidimą skaičius, užrašytas lentoje, yra sveikojo skaičiaus n -tasis laipsnis, tai laimi B. Priešingu atveju laimi A. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, kai a) $n = 2$; b) $n = 3$.

4. Sveikieji (nebūtinai skirtingi) skaičiai a, b, c, d nelygūs 0. Jiems teisingos lygybės

$$(a + b)(c + d) = 17 + 2ad = 9 + 2bc.$$

a) Nustatykite bent vieną galimą reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmę.

b) Nustatykite visas galimas reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmes.

74-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

2026 m. balandžio 3 d., Kaunas

11–12 klasės

1. Tam tikram realiajam skaičiui k nelygybė

$$axy + byz + czx \leq k(x + y + z)^2$$

teisinga su visais tokiais realiaisiais skaičiais x, y, z, a, b, c , kad

$$x, y, z > 0, \quad a, b, c \in [0; \frac{1}{2}], \quad a + b + c = 1.$$

Nustatykite mažiausią galimą skaičiaus k reikšmę.

2. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas, kurio centras yra taškas I , liečia kraštines BC, CA ir AB atitinkamai taškuose D, E ir F . Tiesė, lygiagreti su tiese DF ir einanti per E , kerta atkarpą BC taške K . Tiesė, lygiagreti su tiese DE ir einanti per F , kerta atkarpą BC taške L . Įrodykite, jog atkarpos EK vidurio statmuo, atkarpos FL vidurio statmuo ir tiesė AI kertasi viename taške.

3. Aibės A ir B yra tokie visų sveikųjų skaičių aibės \mathbb{Z} netušti poaibiai, kad:

- (i) kiekvienas sveikasis skaičius yra bent vienoje iš aibių A ir B ;
- (ii) kiekvienam skaičiui x , kuris yra aibėje A , skaičius $x - 1$ yra aibėje B ;
- (iii) kiekvienai aibės B (nebūtinai skirtingų) skaičių porai (x, y) skaičius $x + y$ yra aibėje A .

Nustatykite:

- a) bent vieną skaičių, kuris garantuotai yra aibėje A ;
- b) visas galimas tokias aibių poras (A, B) .

4. Sveikieji (nebūtinai skirtingi) skaičiai a, b, c, d nelygūs 0. Jiems teisingos lygybės

$$(a + b)(c + d) = 17 + 2ad = 9 + 2bc.$$

- a) Nustatykite bent vieną galimą reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmę.
- b) Nustatykite visas galimas reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmes.