74-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Šalies etapo užduotys ir sprendimai

2026 m. balandžio 3 d., Kaunas

9–10 klasės

1. Lentoje užrašyti tokie trys skirtingi teigiami realieji skaičiai x, y, z, kad skaičiai xy, yz, zx ir $x^n + y^n + z^n$ yra racionalieji. Nustatykite, ar būtinai visi trys skaičiai x, y, z yra racionalieji, kai a) $n = 4$; b) $n = 3$.

Sprendimas. a) Kai $n = 4$, tai skaičiai x, y, z gali būti iracionalieji. Pavyzdžiui, $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$, $z = 3\sqrt{2}$: tada $xy = 4$, $yz = 12$, $zx = 6$ ir $x^n + y^n + z^n = 392$.

b) Dviejų racionaliųjų skaičių suma, sandauga ir santykis (kai nėra dalijama iš 0) taip pat yra racionalieji skaičiai. Kai $n = 3$, tai iš eilės gauname, kad šie skaičiai yra racionalieji:

$$\frac{x}{y} = (zx) : (yz), \qquad x^2 = \frac{x}{y} \cdot xy, \qquad \text{analogiškai } \; y^2,\; z^2,$$

$$x(x^3 + y^3 + z^3) = (x^2)^2 + xy \cdot y^2 + zx \cdot z^2 \qquad (\text{čia } \; x^3 + y^3 + z^3 > 0),$$

$$x = x(x^3 + y^3 + z^3) : (x^3 + y^3 + z^3), \qquad \text{analogiškai } \; y,\; z.$$

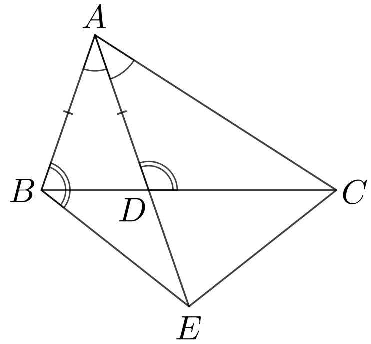
Vadinasi, visi skaičiai x, y ir z garantuotai yra racionalieji.

Pastaba. Analogiškai galima įrodyti, kad skaičiai x, y, z neprivalo būti racionalieji, kai natūralusis skaičius n lyginis, ir privalo, kai natūralusis skaičius n nelyginis.

Ats.: a) nebūtinai; b) būtinai.

2. Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas toks taškas D, kad $AB = AD$ (čia $D \neq B$). Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė. Ji yra tokioje ilgesnėje atkarpoje AE, kad $\angle ABD + \angle ABE = 180°$. Įrodykite, kad $AB \cdot CE = AE \cdot BD$.

Sprendimas. Pagal $AB = AD$ trikampis ABD lygiašonis, ir $\angle ABD = \angle ADB$. Trikampiai ABE ir ADC lygūs pagal kraštinę ir du kampus: $AB = AD$ (duota), $\angle BAE = \angle DAC$ (pusiaukampinė AD) ir $\angle ABE = 180° - \angle ABD = 180° - \angle ADB = \angle ADC$ (žr. pav.).



Taigi $AE = AC$, o trikampis ACE lygiašonis. Jo kampas CAE prieš pagrindą lygus lygiašonio trikampio ADB kampui DAB prieš pagrindą. Todėl ir šių trikampių kampai prie pagrindo lygūs, o patys trikampiai yra panašieji. Vadinasi, $\frac{CE}{AE} = \frac{DB}{AB}$ ir $AB \cdot CE = AE \cdot BD$.

Kitas sprendimas. Pagal $AB = AD$ trikampis ABD lygiašonis, ir $\angle ABD = \angle ADB$. Taigi

$$\angle CBE = \angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = (180^\circ - \angle ABD) - \angle ABD =$$

$$= 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB = \angle BAD = \angle CAE.$$

Kadangi $\angle CBE = \angle CAE$, tai keturkampis $ABEC$ įbrėžtinis. Tada $\triangle AEC \sim \triangle ABD$ pagal $\angle AEC = \angle ABC = \angle ABD$ ir $\angle EAC = \angle BAD$ (pusiaukampinė AD). Vadinasi, $\frac{CE}{AE} = \frac{DB}{AB}$ ir $AB \cdot CE = AE \cdot BD$.

3. Lentoje užrašytas skaičius 1. Pasirinkę natūralųjį skaičių n, žaidėjai A ir B žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis atlieka ėjimus: A atlieka savo pirmąjį ėjimą, tada B – savo pirmąjį ėjimą, ir t. t. Savo k-tojo ėjimo metu ($k = 1, 2, 3, \ldots$) žaidėjas turi pasirinkti skaičių b – bet kurį iš skaičių $1, 2, 3, \ldots, 2k$, nutrinti tuo metu lentoje užrašytą skaičių a ir vietoj jo užrašyti sumą $a + b$. Kaskart žaidėjui B atlikus savo k-tąjį ėjimą, kai $k = 10, 11, 12, \ldots$, žaidėjas A nusprendžia, ar sustabdyti žaidimą. Žaidėjas A turi sustabdyti žaidimą ne vėliau nei po žaidėjo B šimtojo ėjimo. Jei sustabdžius žaidimą skaičius, užrašytas lentoje, yra sveikojo skaičiaus n-tasis laipsnis, tai laimi B. Priešingu atveju laimi A. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, kai a) $n = 2$; b) $n = 3$.

Sprendimas. a) Kai $n = 2$, pergalės strategiją turi B. Žaidėjui A pakeitus skaičių a skaičiumi $a+b$, kur b yra skaičius nuo 1 iki $2k$ (k-tasis ėjimas), žaidėjas B gali kaskart pasirinkti skaičių $c = (2k + 1) - b$, taip pat nuo 1 iki $2k$, ir užrašyti lentoje skaičių $a + b + c = a + (2k + 1)$. Remiantis formule $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$, žaidėjas B savo m-tuoju ėjimu užrašo skaičių

$$1 + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \ldots + ((m + 1)^2 - m^2) = (m + 1)^2.$$

Taigi, kad ir kada A sustabdys žaidimą, lentoje bus sveikojo skaičiaus kvadratas, ir B laimės.

b) Kai $n = 3$, pergalės strategiją turi A. Pirmuoju ėjimu A gali užrašyti skaičių $1 + 1$. Žaidėjui B pakeitus skaičių a skaičiumi $a + b$, kur b yra skaičius nuo 1 iki $2k$ (k-tasis ėjimas), žaidėjas A gali kaskart pasirinkti skaičių $c = (2k + 1) - b$ (svarbu, kad $c \in [1; 2(k + 1)]$) bei užrašyti $a + b + c = a + (2k + 1)$. Analogiškai kaip a) dalyje yra įrodoma, kad A savo m-tuoju ėjimu užrašo skaičių $1 + m^2$. Tada kiekvienam žaidėjui atlikus savo dešimtąjį ėjimą, lentoje bus skaičius $x = 1 + 10^2 + b$, kur b yra skaičius nuo 1 iki 20. Taigi $x \in [102; 121]$. Šiame intervale nėra nė vieno sveikojo skaičiaus kubo. Tokiu metu sustabdęs žaidimą, A laimi.

Pastabos. Formules a) $(m + 1)^2$; b) $1 + m^2$ galima įrodyti ir matematine indukcija.

Intervale $[102; 121]$ nėra n-tųjų sveikojo skaičiaus laipsnių, kai $n = 3, 4, 5, \ldots$. Todėl A turi pergalės strategiją visiems tokiems n.

Ats.: a) žaidėjas B; b) žaidėjas A.

4. Sveikieji (nebūtinai skirtingi) skaičiai a, b, c, d nelygūs 0. Jiems teisingos lygybės

$$(a+b)(c+d) = 17 + 2ad = 9 + 2bc.$$

a) Nustatykite bent vieną galimą reiškinio $a^2+b^2+c^2+d^2$ reikšmę.
b) Nustatykite visas galimas reiškinio $a^2+b^2+c^2+d^2$ reikšmes.

Sprendimas. Iš karto spręskime b) dalį.
Pertvarkykime lygybes $(a+b)(c+d) = 17+2ad$ ir $(a+b)(c+d) = 9+2bc$:

$$ac - ad + bc + bd = 17, \qquad ac + ad - bc + bd = 9.$$

Gautųjų lygybių sumą ir skirtumą padalykime iš 2:

$$ac + bd = 13, \qquad bc - ad = 4.$$

Šias lygybes pakelkime kvadratu ir sudėkime, suprastindami mišriąsias sandaugas $2ac \cdot bd$ ir $2bc \cdot ad$:

$$a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 = 13^2 + 4^2 = 185,$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 185.$$

Taigi $a^2+b^2 \geqslant 1^2+1^2$ ir $c^2+d^2 \geqslant 1^2+1^2$ turi būti skaičiaus $185 = 5 \cdot 37$ teigiami dalikliai, kurių sandauga lygi 185. Tėra dvi galimybės: $(a^2+b^2, c^2+d^2) = (5, 37)$ arba $(37, 5)$. Bet kuriuo atveju $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5+37 = 42$.

Skaičiai 5 ir 37 užrašomi dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma tik taip: $5 = 1+4 = 4+1$, $37 = 1+36 = 36+1$. Atsižvelgus į tai bei turimas lygybes skaičiams a, b, c, d, galima pastebėti tinkamus ketvertus $(a,b,c,d) = (1,6,1,2)$ ir $(2,1,6,1)$ (taip pat tinka šie ketvertai, padauginti iš -1). Taigi reikšmė $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1^2+6^2+1^2+2^2 = 42$ išties yra galima.

Pastaba. Skaičiai $ac+bd = 13$ ir $bc-ad = 4$ tarpusavyje pirminiai, todėl DBD $(a,b) = 1$. Tai pastebėjus, galima kitaip gauti, kad 185 dalijasi iš a^2+b^2. Kadangi $13a+4b = a(ac+ +bd)+b(bc-ad) = c(a^2+b^2)$, tai iš a^2+b^2 dalijasi skaičiai $(13a+4b)(13a-4b) = 169a^2-16b^2 = = 185a^2 - 16(a^2+b^2)$, $185a^2$ ir, pagal DBD $(a,b) = 1$, skaičius 185. Analogiškai 185 dalijasi iš c^2+d^2. Taip lieka baigtinis galimybių skaičius, koks gali būti ketvertas (a,b,c,d).

Ats.: a) ir b) 42.

11–12 klasės

1. Tam tikram realiajam skaičiui k nelygybė

$$axy + byz + czx \leqslant k(x+y+z)^2$$

teisinga su visais tokiais realiaisiais skaičiais x, y, z, a, b, c, kad

$$x, y, z > 0, \quad a, b, c \in [0; \tfrac{1}{2}], \quad a+b+c = 1.$$

Nustatykite mažiausią galimą skaičiaus k reikšmę.

Sprendimas. Tarkime, kad skaičiai x, y, z, a, b, c tokie, kaip nurodyta uždavinio sąlygoje. Dėl simetrijos galime nemažindami bendrumo tarti, kad $z \geqslant x > 0$ ir $z \geqslant y > 0$. Tada

$$axy + byz + czx = (1-b-c)xy + byz + czx = xy + by(z-x) + cx(z-y) \leqslant$$

$$\leqslant xy + \frac{1}{2}y(z-x) + \frac{1}{2}x(z-y) = \frac{(x+y)z}{2}.$$

Remiantis aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe,

$$\sqrt{(x+y)z} \leqslant \frac{x+y+z}{2}, \qquad \frac{(x+y)z}{2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(x+y+z)^2.$$

Taigi tinka reikšmė $k = \frac{1}{8}$. Ji negali būti mažesnė. Tuo įsitikinsime, duotojoje nelygybėje imdami

$$a = 0, \quad b = c = \frac{1}{2}, \qquad z = x + y, \quad x,\, y > 0, \ \text{ pavyzdžiui, } \ (x, y, z) = (1, 1, 2).$$

Skaičiui k turi būti teisingos nelygybės

$$0 \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \leqslant k(1+1+2)^2, \qquad 2 \leqslant 16k, \qquad k \geqslant \frac{1}{8}.$$

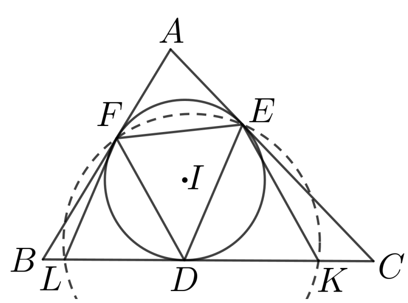
Ats.: $\frac{1}{8}$.

2. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas, kurio centras yra taškas I, liečia kraštines BC, CA ir AB atitinkamai taškuose D, E ir F. Tiesė, lygiagreti su tiese DF ir einanti per E, kerta atkarpą BC taške K. Tiesė, lygiagreti su tiese DE ir einanti per F, kerta atkarpą BC taške L. Įrodykite, jog atkarpos EK vidurio statmuo, atkarpos FL vidurio statmuo ir tiesė AI kertasi viename taške.

Sprendimas. Tiesės DF ir EK lygiagrečios, todėl $\angle FDE = \angle DEK$ (priešiniai kampai). Taip pat tiesės DE ir FL lygiagrečios, todėl $\angle LFD = \angle FDE$ (priešiniai kampai). Taigi $\angle LFD = \angle DEK$. Be to, tiesė DK liečia trikampio DEF apibrėžtinį apskritimą, todėl $\angle DFE = \angle EDK$. Vadinasi,

$$\angle LFE + \angle EKL = \angle LFD + \angle DFE + \angle EKD = \angle DEK + \angle EDK + \angle EKD = 180^\circ$$

(trikampio DEK kampų suma). Taigi keturkampis $EFLK$ yra įbrėžtinis (priešingų kampų suma 180°).



Kadangi $AE = AF$ (liestinės iš to paties taško A) ir $IE = IF$ (apskritimo spinduliai), tai trikampiai AEF bei IEF lygiašoniai, ir jų aukštinės iš A bei I yra jų pusiaukraštinės. Vadinasi, šios aukštinės yra atkarpos EF vidurio statmenyje – tiesėje AI. Taigi tiesė AI (kaip atkarpos EF vidurio statmuo), atkarpos EK vidurio statmuo ir atkarpos FL vidurio statmuo eina per tą patį tašką – keturkampio $EFLK$ apibrėžtinio apskritimo centrą. Tai ir reikėjo įrodyti.

3. Aibės A ir B yra tokie visų sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ netušti poaibiai, kad:

(i) kiekvienas sveikasis skaičius yra bent vienoje iš aibių A ir B;
(ii) kiekvienam skaičiui x, kuris yra aibėje A, skaičius $x - 1$ yra aibėje B;
(iii) kiekvienai aibės B (nebūtinai skirtingų) skaičių porai (x, y) skaičius $x+y$ yra aibėje A.

Nustatykite:

a) bent vieną skaičių, kuris garantuotai yra aibėje A;
b) visas galimas tokias aibių poras (A, B).

Sprendimas. a) Jei $0 \notin A$, tai $0 \in B$ pagal (i). Tačiau tada $0 = 0 + 0 \in A$ pagal (iii) (prieštara). Taigi skaičius 0 garantuotai yra aibėje A. Pastebėkime, kad $-1 \in B$ pagal (ii).

b) Jei $a \in A$, tai $a - 1 \in B$ pagal (ii), o jei $b \in B$, tai $b - 1 = b + (-1) \in A$ pagal (iii). Vadinasi, kartu su $a \in A$ aibėje A visada yra skaičiai $a - 2$, $a - 4$, $a - 6$, $\ldots$ (visi mažesni to paties lyginumo skaičiai), ir analogiškas teiginys teisingas aibei B. Kartu su $0 \in A$ aibėje A yra visi neigiami lyginiai skaičiai -2, -4, -6, $\ldots$.

Tegu $0 \in B$. Pagal (iii) kiekvienam $x \in B$ gauname $x = x + 0 \in A$, t. y. B yra aibės A poaibis. Pagal (i) kiekvienas sveikasis skaičius priklauso aibei A, taigi $A = \mathbb{Z}$. Pagal (ii) turime $B = \mathbb{Z}$. Gautoji pora (A, B) tenkina uždavinio sąlygą.

Toliau tarkime, kad $0 \notin B$. Jei aibėje B būtų teigiamas lyginis skaičius b, tai joje būtų skaičiai $b - 2$, $b - 4$, $\ldots$, 0. Vadinasi, aibėje B nėra teigiamų lyginių skaičių, o pagal (i) jie visi, kaip ir 0 bei neigiami lyginiai skaičiai, yra aibėje A. Tada pagal (ii) aibėje B yra visi nelyginiai sveikieji skaičiai.

Jei aibėje B yra bent vienas lyginis skaičius $2c$, tai $1 = 2c+(1-2c) \in A$ pagal (iii) ir $0 \in B$ pagal (ii). Gauname prieštarą, tad B sutampa su visų nelyginių sveikųjų skaičių aibe. Jei aibėje A yra bent vienas nelyginis skaičius, tai aibėje B yra lyginis skaičius pagal (ii). Taigi A sutampa su visų lyginių sveikųjų skaičių aibe. Ši pora (A, B) tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: a) pavyzdžiui, 0; b) $(A, B) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $(A, B) = (2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1)$,
čia $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $2\mathbb{Z} + 1 = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$.

4. Žr. 9–10 klasių 4 uždavinį.