Atranka į 2026 m. Pasaulinę matematikos olimpiadą

Pirmoji diena, 2026–05–01

1. Kiekvieno natūraliojo skaičiaus a dešimtainės išraiškos skaitmenų sumą žymėkime $S(a)$. Nustatykite, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius m, kad skaičius $S(mn)$ yra lyginis su kiekvienu natūraliuoju n.

2. Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške M. Trikampių ABM ir CDM apibrėžtiniai apskritimai kerta tiesę BC atitinkamai taškuose $K \neq B$ ir $L \neq C$. Taškai P ir Q yra atitinkamai trikampių AKM ir DLM aukštinių iš viršūnės M pagrindai. Įrodykite, kad tiesės BC ir PQ yra lygiagrečios.

3. Matematinėse varžybose 30 mokinių sprendė 8 uždavinius. Vėliau kiekvienam uždaviniui nustatytas jį išsprendusių mokinių skaičius. Likusių (to uždavinio neišsprendusių) mokinių skaičius $a \geqslant 0$ imamas kaip to uždavinio vertė, t. y. visiems tą uždavinį išsprendusiems mokiniams už jį skiriama po a taškų. Likusiems a mokinių už tą uždavinį skiriama po 0 taškų. Kiekvienam mokiniui apskaičiuojama jo visų gautų taškų suma. Mokinio A visų gautų taškų suma yra lyginė.

   a) Ar įmanoma, kad kiekvienas mokinys, išskyrus A, surinko mažiau taškų nei A, bet išsprendė daugiau uždavinių nei A?

   b) Ar įmanoma, kad kiekvienas mokinys, išskyrus A, surinko daugiau taškų nei A, bet išsprendė mažiau uždavinių nei A?

Atranka į 2026 m. Pasaulinę matematikos olimpiadą

Antroji diena, 2026–05–02

4. Realiesiems skaičiams a, b, c teisingos lygybės

$$a + b + c = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 10.$$

Nustatykite didžiausią galimą reiškinio

$$|(a - b)(b - c)(c - a)|$$

reikšmę.

5. Duoti 5×5 lentelė, kurios visi 25 langeliai pradžioje yra tušti, ir natūralusis skaičius n. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus; pirmąjį ėjimą atlieka A. Kiekvieno ėjimo metu žaidėjas turi pasirinkti tuo metu tuščią langelį ir jame įrašyti skaičių 1, jei tai žaidėjas A, arba skaičių 0, jei tai žaidėjas B. Užpildžius visus 25 langelius, kiekvienam iš devynių 3×3 kvadratų suskaičiuojama jo visų devynių skaičių suma, ir užrašomas skaičius S – ta iš devynių sumų, už kurią kitos ne didesnės. Jei $S \geqslant n$, tai laimi A, o priešingu atveju laimi B. Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus n reikšmę, su kuria žaidėjas A turi pergalės strategiją.

6. a) Nustatykite visus tokius natūraliuosius skaičius $n > 2$, kad egzistuoja seka a_1, a_2, …, a_n, kurioje kiekvienas iš skaičių $1, 2, \ldots, n$ sutinkamas lygiai vieną kartą ir kuriai suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ dalijasi iš k kiekvienam $k = 1, 2, \ldots, n$.
b) Nustatykite, ar egzistuoja begalinė natūraliųjų skaičių seka a_1, a_2, a_3, …, kurioje kiekvienas natūralusis skaičius sutinkamas lygiai vieną kartą ir kuriai suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ dalijasi iš k kiekvienam natūraliajam k.