

**Atrankos į 2026 m. Pasaulinę matematikos olimpiadą
užduotys ir sprendimai**

2026 m. gegužės 1–2 d., Vilnius

1. Natūraliojo skaičiaus a dešimtainės išraiškos skaitmenų sumą žymėkime $S(a)$. Nustatykite, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius m , kad skaičius $S(mn)$ yra lyginis su kiekvienu natūraliuoju n .

Sprendimas. Galime atmesti atvejį $m = 1$: tada $S(mn) = 1$, kai $n = 1$. Įrodysime, kad galima atmesti ir visas kitas m reikšmes.

Nagrinėkime bet kokį natūralųjį $m > 1$, kuris nesidalija nei iš 2, nei iš 5. Begalinėje sekoje 1, 11, 111, ... dviejų narių dalybos iš m liekanos sutampa. Tada iš m dalijasi šių narių skirtumas

$$\underbrace{11 \dots 11}_k \underbrace{00 \dots 00}_K = \underbrace{11 \dots 11}_k \cdot 2^K \cdot 5^K,$$

o pagal DBD $(m, 10)$ – ir daugiklis $d = \underbrace{11 \dots 11}_k = (10^k - 1) : 9$. Čia $k \geq 2$ (priešingu atveju 1 dalytųsi iš m). Taigi iš m dalijasi skaičius

$$M = d \cdot 10^{k-1} + 9d = \underbrace{11 \dots 11}_k \underbrace{00 \dots 00}_{k-1} + \underbrace{99 \dots 99}_k = \underbrace{11 \dots 11}_{k-2} \underbrace{20}_{k-2} \underbrace{99 \dots 99}_{k-1}.$$

(Čia $M = 209$, kai $k = 2$.) Pažymėkime $n = M : m$. Tada $S(mn) = 1 \cdot (k-2) + 2 + 9 \cdot (k-1) = 10k - 9$ yra nelyginis skaičius.

Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių $m > 1$. Tada $m = m_0 \cdot 2^a \cdot 5^b$, kur skaičius m_0 natūralusis ir nesidalija nei iš 2, nei iš 5, o skaičiai a ir b – neneigiami sveikieji. Skaičiui m_0 egzistuoja toks natūralusis n_0 , kad skaičius $S(m_0 n_0)$ yra nelyginis. Skaičiui m liko pasirinkti $n = n_0 \cdot 2^b \cdot 5^a$: tada skaičius $S(mn) = S(m_0 n_0 \cdot 10^{a+b}) = S(m_0 n_0)$ taip pat yra nelyginis.

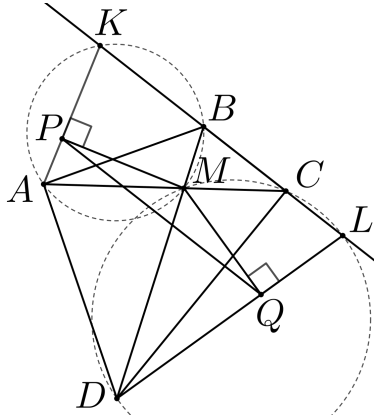
Atsakymas: ne, neegzistuoja.

2. Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške M . Trikampių ABM ir CDM apibrėžtiniai apskritimai kerta tiesę BC atitinkamai taškuose $K \neq B$ ir $L \neq C$. Taškai P ir Q yra atitinkamai trikampių AKM ir DLM aukštinių iš viršūnės M pagrindai. Įrodykite, kad tiesės BC ir PQ yra lygiagrečios.

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$\angle LKM = \angle BKM = \angle BAM = \angle BAC = \angle BDC = \angle CDM = \angle CLM = \angle KLM$$

(įbrėžtiniai kampai). Todėl trikampis KLM lygiašonis, ir $KM = LM$.



Kita vertus, $\angle LDM = 180^\circ - \angle LCM = \angle ACB = \angle ADB$ ir analogiškai $\angle KAM = \angle CAD$. Taigi atkarpos AC ir DB dalija kampus DAK ir ADL pusiau, o jų taškas M yra vienodai nutolęs nuo šių kampų kraštinių: tiek atkarpa MP , tiek atkarpa MQ yra to paties ilgio kaip statmuo iš M į tiesę AD . Vadinasi, $MP = MQ$.

Statieji trikampiai MKP ir MLQ turi po lygų statinį ir po lygią įžambinę, todėl ir jų likę statiniai KP ir LQ lygūs (Pitagoro teorema), o ir patys šie trikampiai lygūs. Prisiminę, kad trikampiai MPQ ir MKL lygiašoniai, gauname:

$$\angle PKL = \angle PKM + \angle BKM = \angle QLM + \angle CLM = \angle QLK,$$

$$\angle KPQ = 90^\circ + \angle MPQ = 90^\circ + \angle MQP = \angle LQP.$$

Vadinasi, keturkampio $KLQP$ kampų suma 360° lygi $2\angle PKL + 2\angle KPQ$. Taigi $\angle PKL + \angle KPQ = 180^\circ$, o tiesės $KL = BC$ ir PQ yra lygiagrečios.

3. Matematinėse varžybose 30 mokinių sprendė 8 uždavinius. Vėliau kiekvienam uždaviniui nustatytas jį išsprendusių mokinių skaičius. Likusių (to uždavinio neišsprendusių) mokinių skaičius $a \geq 0$ imamas kaip to uždavinio vertė, t. y. visiems tą uždavinį išsprendusiems mokiniams už jį skiriama po a taškų. Likusiems a mokinių už tą uždavinį skiriama po 0 taškų. Kiekvienam mokiniui apskaičiuojama visų gautų taškų suma. Mokinio A visų gautų taškų suma yra lyginė.

a) Ar įmanoma, kad kiekvienas mokinys, išskyrus A, surinko mažiau taškų nei A, bet išsprendė daugiau uždavinių nei A?

b) Ar įmanoma, kad kiekvienas mokinys, išskyrus A, surinko daugiau taškų nei A, bet išsprendė mažiau uždavinių nei A?

Sprendimas. a) Taip, įmanoma. Pavyzdžiui, 29 mokiniai galėjo išspręsti visus uždavinius, išskyrus pirmąjį ir antrąjį, o vienas mokinys – tik pirmąjį ir antrąjį uždavinius. Tada uždavinių vertės yra 29, 29, 1, 1, 1, 1, 1, 1, o mokiniai surinko po 6, 6, ..., 6, 58 taškus. Daugiausiai taškų (58) surinkęs mokinys išsprendė mažiausiai uždavinių (tik du).

b) Tarkime, kad tai įmanoma: mokinys A, surinkęs mažiau taškų nei kiti, uždavinių išsprendė daugiau nei kiti. Tarkime, kad A surinko t taškų ir išsprendė k uždavinių. Galime tarti, kad tai pirmieji k uždavinių. Tada kiekvienas kitas mokinys išsprendė daugiausiai $k - 1$ uždavinių, iš kurių daugiausiai $k - 2$ uždavinių yra tarp k pirmųjų (kitais atvejais tas mokinys surinktų ne daugiau nei t taškų).

Tarkime, kad uždavinius $1, 2, \dots, 8$ atitinkamai išsprendė po a_1, a_2, \dots, a_8 mokinių. Tada 1-ojo uždavinio vertė yra $30 - a_1$, o mokiniai už šį uždavinį iš viso gavo $a_1(30 - a_1)$ taškų. Analogiškai gauname taškų sumas $a_2(30 - a_2), \dots, a_8(30 - a_8)$. Dėl patogumo kiekvienam i atlikime keitinį $a_i = 15 + b_i$. Tada $a_i(30 - a_i) = 225 - b_i^2 \leq 255$. Bendra mokinių taškų suma ne didesnė už $225 \cdot 8$, o A taškų surinko mažiau nei vieno mokinio taškų vidurkis, kuris ne didesnis už $\frac{225 \cdot 8}{30} = 60$. Taigi $t \leq 58$ (prisiminkime, kad skaičius t lyginis).

Kita vertus, tarp pirmųjų k uždavinių mokinys A išsprendė visus, o kiti mokiniai daugiausiai po $k - 2$. Todėl

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 29(k - 2) + k = 30k - 58,$$

$$t = (30 - a_1) + (30 - a_2) + \dots + (30 - a_k) = 30k - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \geq 58.$$

Vadinasi, $t = 58$. Nelygybė $t \geq 58$ virsta lygybe, tik jei kiekvienas iš 29 mokinių išsprendė lygiai $k - 2$ uždavinius iš pirmųjų k , o tada (kad liktų išsprendęs mažiau nei k uždavinių, bet surinktų daugiau nei t taškų) – dar lygiai vieną uždavinį iš likusių $8 - k$.

Bendra visų gautų taškų suma lygi skaičių $225 - b_i^2$ sumai $1800 - (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_8^2)$, ir ji ne mažesnė nei $58 + 29 \cdot 59 = 1769$ (nes 29 mokiniai surinko po daugiau nei 58 taškus). Vadinasi, $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_8^2 \leq 1800 - 1769 = 31$. Kiekvienas b_i yra mažesnis už 6, todėl kiekvienas a_i bei $30 - a_i$ yra tarp 10 ir 20 (imtinai). Taigi pagal $t = (30 - a_1) + (30 - a_2) + \dots + (30 - a_k) = 58$ gauname, kad $k < 6$. Kita vertus, turime bendrą išspręstų uždavinių skaičių $a_1 + \dots + a_8 = k + 29(k - 1) = 30k - 29$. Tada

$$a_{k+1} + \dots + a_8 = (30 - a_1) + \dots + (30 - a_k) - 29 = t - 29 = 29.$$

Taigi kairės pusės dėmenų skaičius $8 - k$ mažesnis už 3, ir $k > 5$. Gavome prieštarą. Vadinasi, klausime nurodyta situacija yra neįmanoma.

Atsakymas: a) įmanoma; b) neįmanoma.

4. Realiesiems skaičiams a, b, c teisingos lygybės

$$a + b + c = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 10.$$

Nustatykite didžiausią galimą reiškinio

$$|(a - b)(b - c)(c - a)|$$

reikšmę.

Sprendimas. Galime tarti, kad $a \leq b \leq c$. Pažymėkime $b = a + x$, $c = b + y$. Čia $x \geq 0$, $y \geq 0$ ir

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| = xy(x + y), \quad 0 = a + b + c = 3a + 2x + y, \quad 3a = -2x - y,$$

$$10 = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a + x)^2 + (a + x + y)^2 = 3a^2 + 2a(2x + y) + 2x^2 + 2xy + y^2,$$

$$30 = (3a)^2 + 2(2x + y) \cdot 3a + 6x^2 + 6xy + 3y^2 = (2x + y)^2 - 2(2x + y)^2 + 6x^2 + 6xy + 3y^2,$$

$$30 = 6x^2 + 6xy + 3y^2 - (2x + y)^2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2, \quad x^2 + xy + y^2 = 15.$$

Kadangi $(x - y)^2 \geq 0$, tai $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ir

$$15 = xy + (x^2 + y^2) \geq xy + 2xy = 3xy, \quad xy \leq 5.$$

$$(x + y)^2 = (x^2 + xy + y^2) + xy = 15 + xy \leq 15 + 5 = 20, \quad x + y \leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

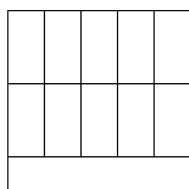
Vadinasi, ieškoma reiškinio $xy(x + y)$ reikšmė ne didesnė nei $5 \cdot 2\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

Nagrinėtos nelygybės galėtų virsti lygybėmis, kai $x = y$ ir $xy = x^2 = 5$, $3a = -2x - y = -3x$ ir $a = -x = -\sqrt{5}$. Taip gauname $(a, b, c) = (-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5})$. Iš tiesų, šis skaičių trejetas tenkina uždavinio sąlygą, ir jam turime $|(a - b)(b - c)(c - a)| = 10\sqrt{5}$. Vadinasi, ieškoma reikšmė yra $10\sqrt{5}$.

Atsakymas: $10\sqrt{5}$.

5. Duoti 5×5 lentelė, kurios visi 25 langeliai pradžioje yra tušti, ir natūralūs skaičius n . Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus; pirmąjį ėjimą atlieka A. Kiekvieno ėjimo metu žaidėjas turi pasirinkti tuo metu tuščią langelį ir jame įrašyti skaičių 1, jei tai žaidėjas A, arba skaičių 0, jei tai žaidėjas B. Užpildžius visus 25 langelius, kiekvienam iš devynių 3×3 kvadratų suskaičiuojama jo visų devynių skaičių suma, ir užrašomas skaičius S – ta iš devynių sumų, už kurią kitos ne didesnės. Jei $S \geq n$, tai laimi A, o priešingu atveju laimi B. Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus n reikšmę, su kuria žaidėjas A turi pergalės strategiją.

Sprendimas. Kai $n \geq 7$, tai A pergalės strategijos neturi. Iš tiesų, padalykime lentelę, kaip parodyta paveikslėlyje. Žaidėjas B gali įrašyti po bent vieną nulį kiekvienoje iš 2×1 dalių (kai A įrašo tokioje tuščioje dalyje vieneta, tai B joje įrašo nulį; kai A atlieka kitokį ėjimą, tai B įrašo nulį bet kurioje tuščioje 2×1 dalyje, jei tokių dar liko). Tada užpildytos lentelės kiekviename 3×3 kvadrato bus bent trys nuliai, esantys 2×1 dalyse, o kvadratų skaičių sumos visos bus ne didesnės nei 6.



Kai $n = 6$, tai A turi pergalės strategiją. Jis gali pirmąjį skaičių įrašyti viduriniame langelyje. Lentelę galima sukti 90° kampu, tad galime tarti, kad B pirmuoju ėjimu įrašo skaičių lentelės apačioje – vienoje iš dviejų apatinių eilučių. Tada A gali įrašyti antrąjį vienetą tiesiai virš pirmojo. Tada B turės įrašyti antrąjį nulį tiesiai virš dviejų vienetų: priešingu atveju tame langelyje vienetą įrašys A, ir atsiras bent vienas 3×3 kvadratas, kuriame yra trys vienetai, bet nė vieno nulio. Tada kitais trimis ėjimais A tame kvadrato galės įrašyti dar tris vienetus ir gauti $S \geq 6$.

Taigi toliau tarkime, kad B savo antruoju ėjimu įrašo nulį virš dviejų vienetų. Turime užpildytą trilangį stulpelį: 0, 1, 1. Jam iš kairės ir dešinės yra dar po du tuščius trilangius stulpelius. Penkis nagrinėjamus trilangius stulpelius iš kairės į dešinę pažymėkime X, Y, Z, T, U . Toliau A gali įrašyti du vienetus stulpelyje Y , dar vieną vienetą stulpeliuose X ir Y (iš viso tris vienetus 6 langeliuose), o tada dar bent du vienetus stulpeliuose X, Y ir T (iš viso 5 vienetus 9 langeliuose). Žaidėjas A taip gauna $S \geq 6$ pagal vieną iš 3×3 kvadratų \overline{XYZ} ir \overline{YZT} . Iš tiesų, priešingu atveju stačiakampyje \overline{YZ} yra bent 4 vienetai, todėl stulpelyje X – daugiausiai vienas, kvadrato \overline{YZT} – daugiausiai 5, o stačiakampyje \overline{XYZT} daugiausiai 6, nors A jame įrašė 7 vienetus.

Atsakymas: $n = 6$.

6. a) Nustatykite visus tokius natūraliuosius skaičius $n > 2$, kad egzistuoja seka a_1, a_2, \dots, a_n , kurioje kiekvienas iš skaičių $1, 2, \dots, n$ sutinkamas lygiai vieną kartą ir kuriai suma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dalijasi iš k kiekvienam $k = 1, 2, \dots, n$.

b) Nustatykite, ar egzistuoja begalinė natūraliųjų skaičių seka a_1, a_2, a_3, \dots , kurioje kiekvienas natūralusis skaičius sutinkamas lygiai vieną kartą ir kuriai suma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dalijasi iš k kiekvienam natūraliajam k .

Sprendimas. a) Kai $n = 3$, tai tinka seka 1, 3, 2. Toliau tarkime, kad $n > 3$ kad seka a_1, a_2, \dots, a_n tenkina uždavinio sąlygą. Kadangi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dalijasi iš n , tai skaičius $\frac{n+1}{2}$ yra sveikasis, o skaičius n nelyginis.

Kadangi $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n = (n-1) \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - a_n$ dalijasi iš $n-1$, tai $\frac{n+1}{2} - a_n$ dalijasi iš $n-1$. Kita vertus, $\frac{n+1}{2} - a_n$ yra tarp skaičių $\frac{n+1}{2} - n = -\frac{n-1}{2}$ ir $\frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$, taigi intervale $(-(n-1); n-1)$, kuriame iš $n-1$ dalijasi tik skaičius 0. Vadinasi, $x_n = \frac{n+1}{2}$.

Kadangi $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n - a_{n-1} = \frac{n^2-1}{2} - a_{n-1} = (n-2) \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - a_{n-1}$ dalijasi iš $n-2$, tai $\frac{n+1}{2} - a_{n-1}$ dalijasi iš $n-2$. Kita vertus, $\frac{n+1}{2} - a_{n-1}$ vėlgi yra tarp skaičių $-\frac{n-1}{2}$ ir $\frac{n-1}{2}$, taigi intervale $(-(n-2); n-2)$ (pagal $\frac{n-1}{2} < n-2$, kai $n > 3$), kuriame iš $n-2$ dalijasi tik skaičius 0. Vadinasi, $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$. Gavome prieštarą. Taigi $n = 3$ yra vienintelė galima reikšmė.

b) Įrodysime, kad reikiama seka egzistuoja. Pradėkime nuo baigtinės sekos $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2$ ir pildykime ją naujais nariais. Nagrinėkime natūralųjį skaičių $n > 3$. Tarkime, kad jau turime baigtinę seką a_1, a_2, \dots, a_N , kurioje kiekvienas natūralusis skaičius sutinkamas daugiausiai vieną kartą, kurioje yra visi natūralieji skaičiai, mažesni už n (bet nebūtinai tik jie) ir kuriai $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dalijasi iš k kiekvienam $k = 1, 2, \dots, N$. Pakanka įrodyti, kad šią seką visada įmanoma papildyti keliais nariais a_{N+1}, a_{N+2}, \dots , kad vėl gautume tokią ilgesnę seką, tik joje jau būtų skaičius n . Taip pildydami baigtines sekas, gausime reikiamą begalinę seką.

Atvejis, kai n jau yra sekoje a_1, a_2, \dots, a_N , trivialus. Toliau tarkime, kad skaičiaus n joje nėra. Tegu $S = a_1 + a_2 + \dots + a_N$. Pasirinkime tokį a_{N+1} , kuriam $S + a_{N+1}$ dalijasi iš $N + 1$, o $S + a_{N+1} + n$ dalijasi iš $N + 2$. Pavyzdžiui, tinka reikšmės $n(N + 1) - S + k(N + 1)(N + 2)$, kur reikia pasirinkti pakankamai didelį natūralųjį k , kad gautume natūralųjį skaičių, nesutampantį nei su jokia iš skaičių a_1, a_2, \dots, a_N , nei su n . Tada galime pasirinkti $a_{N+2} = n$, ir gauname tinkamą ilgesnę seką, kurioje jau yra skaičius n . Tai ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: a) $n = 3$; b) taip, egzistuoja.