

XL Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada
prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai ir sprendimai

Parengė Dominykas Marma, Adomas Birštunas, Daumilas Ardickas

1. **Atsakymas:** Gali būti.

Sprendimas: Tarkime, kad Anos kelionė truko pusantros valandos. Tegu automobilio greitis pirmąjį ir paskutinį kelionės pusvalandį buvo x km/h, o vidurinį pusvalandį buvo y km/h. Tuomet automobilio vidutinis greitis per kiekvieną kelionės valandą yra lygus

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 80 \quad \Rightarrow \quad y = 160 - x.$$

O jo vidutinis greitis visos kelionės metu apskaičiuojamas taip:

$$v = \frac{S}{t} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x + y}{3} = \frac{2x + 160 - x}{3} = \frac{x + 160}{3} = 100, \quad \text{vadinasi} \quad x = 140.$$

Taigi, jei automobilio greitis pirmąsias ir trečiąsias 30 kelionės minučių buvo 140 km/h, o 30 vidurinių minučių buvo 20 km/h, tai visi uždavinio teiginiai yra teisingi.

2. **Atsakymas:** $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$.

Sprendimas: Kadangi $4[x]$ yra sveikasis skaičius, pradinę lygtį galime perrašyti kaip:

$$[x^2 - 4[x] + 1] - [-x^2 + 4[x] - 1] = 0.$$

Tarkime $y = x^2 - 4[x] + 1$, tuomet $[y] = [-y]$. Nesunku pastebėti, kad kai $y > 0$, turime

$$0 \leq [y] = [-y] \leq -1,$$

o tai neįmanoma. Panašiai, kai $y < 0$, turime

$$-1 \geq [y] = [-y] \geq 0.$$

Taigi $y = 0$, t. y. $x^2 - 4[x] + 1 = 0$. Pastebėkime, kad kai $x < 1$, turime $[x] \leq 0$, todėl

$$x^2 - 4[x] + 1 \geq 1 > 0.$$

Taigi $x \geq 1$. Tegul $x = n + a$, kur $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < 1$. Tuomet

$$0 = x^2 - 4[x] + 1 = n^2 + 2na + a^2 - 4n + 1 = n(n - 4) + 2na + a^2 \geq n(n - 4),$$

todėl $n \leq 4$. Vadinasi, $1 \leq n \leq 4$.

Jei $[x] = n = 1$, tuomet

$$x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 4 + 1 = x^2 - 3 = 0,$$

todėl $x = \sqrt{3}$.

Jei $[x] = n = 2$, tuomet

$$x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 8 + 1 = x^2 - 7 = 0,$$

todėl $x = \sqrt{7}$.

Jei $[x] = n = 3$, tuomet

$$x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 12 + 1 = x^2 - 11 = 0,$$

todėl $x = \sqrt{11}$.

Jei $[x] = n = 4$, tuomet

$$x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 16 + 1 = x^2 - 15 = 0,$$

todėl

$$x = \sqrt{15} < 4,$$

o tai prieštarauja $[x] = 4$.

3. Įstatę $(i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3)$ ir $(i, j, k) \leftarrow (2, 1, 3)$ į duotąją sąlygą, gauname

$$-M_3 - M_1 + 2M_2 = C = M_3 - 2M_2 + M_1,$$

vadinasi $C = -C$, t. y. $C = 0$.

Kita vertus, įstatę $(i, j, k) \leftarrow (n, n+1, n+2)$ į duotąją sąlygą, gauname $-M_{n+2} - M_n + 2M_{n+1} = 0$, t. y.

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2}$$

visiems teigiamiesiems sveikiesiems skaičiams n , vadinasi (M_n) yra aritmetinė progresija ir egzistuoja realieji skaičiai m ir d tokie, kad $M_n = m + nd$ visiems teigiamiesiems sveikiesiems skaičiams n .

Galiausiai, kadangi

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1} = m + (n^2 - (n-1)^2)d = (m-d) + n \cdot 2d,$$

darome išvadą, kad (a_n) taip pat yra aritmetinė progresija.

4. Turime $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$, $y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} = -\frac{a_1(n-1)}{n}$ ir $y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_{n-2}y_{n-1} = \frac{a_2(n-2)}{n}$. Iš to išplaukia, kad $X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2$ ir $Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 = \frac{a_1^2(n-1)^2}{n^2} - \frac{2a_2(n-2)}{n}$. Todėl

$$\begin{aligned} \frac{X}{n} - \frac{Y}{n-1} &= a_1^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} \right) - 2a_2 \left(\frac{1}{n} - \frac{n-2}{n(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} ((n-1)a_1^2 - 2na_2) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} ((n-1)X - 2a_2). \end{aligned}$$

Pagal perstatų nelygybę, $(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \geq 0$, o lygybė galioja tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Kadangi šaknys yra skirtingos, gauname griežtą nelygybę.

5. **Atsakymas:** (I) lygties šaknys yra $x_1 = x_2 = -\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$, $x_3 = \sqrt[3]{4n}$;

(II) lygties šaknys yra $y_1 = -\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$, $y_2 = y_3 = 5\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$.

Ieškome bendros šaknies.

$$x^3 + mx - n = 0 \quad (I)$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0 \quad (II)$$

$$n \cdot (I) - (II) \Rightarrow mx^2 + 3nx + m^2 = 0 \quad (III)$$

$$x \cdot (III) - m \cdot (I) \Rightarrow 3x^2 + m = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-m}{3} \quad (IV)$$

$$\text{Įsistačius } x^2 \text{ į (I), gaunam } \frac{-m}{3}x + mx - n = 0 \Rightarrow 2mx = 3n \Rightarrow x = \frac{3n}{2m} \quad (V)$$

Išreiškiame m per n :

$$8m^3 \cdot (I) \text{ ir } 2mx = 3n \Rightarrow 8m^3x^3 + 8m^3mx - 8m^3n = (2mx)^3 + 4m^3(2mx) - 8m^3n = \\ = (2mx)^3 + 4m^3(2mx) - 8m^3n = (3n)^3 + 4m^33n - 8m^3n = 27n^3 + 4m^3n = 0$$

$$\Rightarrow 27n^2 + 4m^3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3\sqrt[3]{2n^2}}{2} \quad (VI)$$

$$\text{Taigi } x = \frac{3n}{2m} = \frac{3n}{-3\sqrt[3]{2n^2}} = -\sqrt[3]{\frac{n}{2}}.$$

(a) Sprendžiame $x^3 + mx - n = 0$ žinodami vieną šaknį $x_1 = -\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ ir (VI).

Išsireiškiame per m per n ir n per x_1 : $x^3 + \frac{-3\sqrt[3]{2n^2}}{2}x - n = 0 \Rightarrow x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 = 0$. Taigi $(x - x_1)(x + x_1x - 2x_1^2) = 0$, todėl likusios šaknys yra lygties $x + x_1x - 2x_1^2 = 0$ sprendiniai: $x_2 = x_1$, $x_3 = -2x_1 = \sqrt[3]{4n}$.

(b) Sprendžiame $nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$ žinodami vieną šaknį $y_1 = -\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ ir (VI). Išsireiškiame per m per n ir n per y_1 : $x^3 - 9\sqrt[3]{\frac{n}{2}}x^2 + \frac{15\sqrt[3]{2n^2}}{2}x + \frac{27n}{2} - n = 0$, taigi $x^3 + 9y_1x^2 + 15y_1^3x - 25y_1^3 = 0 \Rightarrow (x - y_1)(x^2 + 10y_1x + 25y_1^2) = (x - y_1)(x + 5y_1)^2 = 0$, taigi $y_2 = y_3 = -5y_1 = 5\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$.

6. **Atsakymas:** $n = 9$.

Sprendimas: Akivaizdu, $a > b$, tuomet galioja ši lygybė:

$$n = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b).$$

Vadinasi $n = 9k$. Belieka rasti, koks yra teigiamas sveikasis skaičius k , kuriam yra didžiausias skaitmenų porų, besiskiriančių per k , skaičius. Akivaizdu, tai yra $k = 1$ ir yra 8 tokios skaitmenų poros. Taigi, $n = 9$.

7. **Atsakymas:** ne.

Sprendimas. Tegul x, y, z, t yra Petro parašytų pažymių skaičiai. Gauname:

$$10x + 9y + 8z + 7t = 9x + 8y + 7z + 10t,$$

Taigi gauname

$$x + y + z = 3t \quad \text{arba} \quad x + y + z + t = 4t.$$

Nesunku suprasti, kad bendras pažymių skaičius yra lygus $x + y + z + t$ ir iš paskutinės lygybės jis dalijasi iš 4, tačiau skaičius 2026 iš 4 nesidalija. Todėl tokia situacija yra neįmanoma.

8. **Atsakymas:** (3, 24), (6, 96), (3, 6), (6, 24), (9, 54), (12, 96) ir (13, 113).

$$60a^2b - 32a^4 - 18b^2 = 2026k, k \in \mathbb{N}, \Rightarrow 30a^2b - 16a^4 - 9b^2 = 1013k.$$

$$30a^2b - 16a^4 - 9b^2 = 24a^2b - 9b^2 + 6a^2b - 16a^4 = 3b \cdot (8a^2 - 3b) + 2a^2 \cdot (3b - 8a^2) = (8a^2 - 3b) \cdot (3b - 2a^2) = 1013k.$$

1013 yra pirminis, todėl galimi tik tokie variantai:

a) $8a^2 - 3b = 0$ ir $k = 0$,

b) $3b - 2a^2 = 0$ ir $k = 0$,

c) Yra tokie $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, kad: $\begin{cases} 8a^2 - 3b = n & (I) \\ 3b - 2a^2 = 1013m & (II) \end{cases}$, arba

d) Yra tokie $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, kad: $\begin{cases} 8a^2 - 3b = 1013n & (III) \\ 3b - 2a^2 = m & (IV) \end{cases}$

Pastebėkime, kad jei $3b - 2a^2 < 0$, tai $0 < 2a^2 - 3b \leq 8a^2 - 3b$. Todėl abu m ir n negali būti neigiami.

a) $8a^2 - 3b = 0 \Rightarrow 3b = 8a^2$, todėl $a = 3s$, ir $s \in \mathbb{N}$. Todėl $3b = 8 \cdot 9s^2 \Rightarrow b = 24s^2$.

Jei $s \geq 3$, $|a - b| = |3s - 24s^2| \geq |9 - 216| > 100$ - netinkami sprendiniai.

Iš čia sprendinių tenkinančių sąlygą $|a - b| \leq 100$ yra du: (3, 24) ir (6, 96).

b) $3b - 2a^2 = 0 \Rightarrow 3b = 2a^2$, todėl $a = 3s$, ir $s \in \mathbb{N}$. Todėl $3b = 2 \cdot 9s^2 \Rightarrow b = 6s^2$.

Jei $s \geq 5$, $|a - b| = |3s - 6s^2| \geq |15 - 150| > 100$ - netinkami sprendiniai.

Iš čia sprendinių tenkinančių sąlygą $|a - b| \leq 100$ yra 4: (3, 6), (6, 24), (9, 54) ir (12, 96).

c) $I + II : 6a^2 = 1013m + n \Rightarrow a^2 = \frac{1013m + n}{6} \Rightarrow a = \sqrt{168 + \frac{5m + n}{6}} \geq \sqrt{169} = 13 \Rightarrow a \geq 13$.

$$\text{Iš } I, b = \frac{8a^2 - n}{3} = \frac{8 \cdot (1013m + n) - 6n}{3 \cdot 6} = \frac{8104m + 2n}{18} = \frac{4052m + n}{9} = \\ = \frac{1013m + n}{9} + \frac{3039m}{9} = \frac{6a^2}{9} + \frac{1013m}{3} > \frac{2a^2}{3} + 337 > a + 300, \text{ kai } a \geq 13.$$

Taigi, $|a - b| > 100$ ir tinkamų sprendinių nėra.

d) $III + IV : 6a^2 = 1013n + m \Rightarrow a^2 = \frac{1013n + m}{6} \Rightarrow a = \sqrt{168 + \frac{5n + m}{6}} \geq \sqrt{169} = 13 \Rightarrow a \geq 13$.

Taigi, yra toks $c \geq 0$, kad $a = c + 13$.

$$\text{Iš } IV, b = \frac{2a^2 + m}{3} = \frac{2(c + 13)^2 + m}{3} = \frac{2c^2 + 52c + 338 + m}{3} \geq \frac{2c^2 + 52c + 339}{3} = \\ = \frac{3c + 39 + 300}{3} + \frac{2c^2 + 49c}{3} \geq (c + 13) + 100 + \frac{2c^2 + 49c}{3} = a + 100 + \frac{2c^2 + 13c}{3} \geq a + 100$$

Iš čia, jeigu $c > 0$, tai $b > a + 100$ ir netenkina sąlygos, todėl $c = 0$, $a = 13$ ir $b = a + 100 = 113$.

Patikriname, ar (13, 113), tenkina sąlygą: $60 \cdot 13^2 \cdot 113 - 32 \cdot 13^4 - 18 \cdot 113^2 = 2026$ tikrai dalosi iš 2026.

Atsakymas: Yra 7 sprendiniai tenkinantys sąlygas: (3, 24), (6, 96), (3, 6), (6, 24), (9, 54), (12, 96) ir (13, 113).

9. **Atsakymas:** Ne visada.

Tegu pirmieji trys sekos nariai yra 1, $4!$ ir 2. Kol kas kiekvienas iš $1 + 4!$, $4! + 2$ ir $1 + 4! + 2$ yra sudėtinis. Seką ilginsime po du narius. Antrasis pridedamas narys yra mažiausias skaičius, kurio dar nebuvo sekoje, o pirmasis pridedamas narys yra ankstesnių narių ir po jo einančio nario sumos faktorialas. Taigi penktasis narys yra 3, ketvirtasis narys yra $(1 + 4! + 2 + 3)!$, septintasis narys yra 4, o šeštasis narys yra $(1 + 4! + 2 + (1 + 4! + 2 + 3)! + 3 + 4)!$. Kadangi kiekviename etape pridedamas nelyginės eilės narys yra mažiausias skaičius, kurio dar nėra, tai kiekvienas natūralusis skaičius galiausiai pasirodys sekoje. Joks natūralusis skaičius negali pasirodyti du kartus, nes kiekviename etape pridedamas lyginės eilės narys yra didesnis už bet kurį anksčiau pasirinktą skaičių. Bet kuriame gretimų narių bloke, išskyrus $\{1, 4!\}$, didžiausias narys yra pavidalo $n!$, o kitų narių suma yra koks nors natūralusis skaičius k , kur $2 \leq k \leq n$. Tada bloko narių suma yra $n! + k$, kuris yra sudėtinis skaičius, nes dalijasi iš k .

10. Įstatę $(a, b) \leftarrow (1, 1)$ į pirmąją duotąją sąlygą, gauname $f(1, 1) = 1$. Kita vertus, įstatę $(a, b) \leftarrow (a, b + 1)$ gauname

$$f(a, b + 1) + a + b + 1 = f(a, 1) + f(1, b + 1) + ab + a.$$

Atėmus iš šios iš šios lygties pirmąją duotąją sąlygą gauname, kad

$$f(a, b + 1) - f(a, b) = f(1, b + 1) - f(1, b) + a - 1.$$

Tegul $p > 2$ yra toks pirminis skaičius, kad $p \mid a + b$, o tai reiškia, kad $p \mid f(a, b)$. Kadangi $p \mid a + (b + 1) - 1$, taip pat turime $p \mid f(a, b + 1)$. Todėl, $p \mid f(1, b + 1) - f(1, b) + a - 1$ ir

$$p \mid f(1, b + 1) - f(1, b) - b - 1 \quad (*)$$

visiems teigiamiesiems sveikiesiems skaičiams a ir b , ir pirminiams skaičiams $p > 2$ tokiems, kad $p \mid a + b$.

Pastebėkime, kad dešinioji (*) pusė nepriklauso nuo a , todėl keisdami a ir laikant konkretų b , gautume be galo daug nelyginių pirminių skaičių dalijančių $f(1, b + 1) - f(1, b) - b - 1$, o tai įmanoma tik tuo atveju, jei pastarasis lygus 0, t. y.

$$f(1, b + 1) = f(1, b) + b + 1$$

kiekvienam teigiamam sveikajam skaičiui b .

Todėl, $f(1, 2) = f(1, 1) + 2 = 1 + 2$, $f(1, 3) = f(1, 2) + 3 = 1 + 2 + 3$, t. y.

$$f(1, n) = 1 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

(pagal matematinę indukciją).

Panašiai, pradėję nuo $(a, b) \leftarrow (a + 1, b)$, gauname, kad

$$f(n, 1) = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Galiosiausiai, iš

$$f(a, b) + a + b = f(a, 1) + f(1, b) + ab$$

$$= \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + ab,$$

išplaukia, kad

$$f(a, b) = \frac{(a+b)(a+b-1)}{2}.$$

Ši funkcija akivaizdžiai tenkina antrąją duotąją sąlygą, vadinasi, ji yra vienintelis sprendinys.

11. **Atsakymas:** a) taip; b) ne

Sprendimas. a) Tokio skaičių išdėstymo pavyzdys parodytas žemiau. Skaičių suma eilutėse yra 40, o stulpeliuose ji yra 24.

1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

5 pav.

b) Tarkime, kad tai įmanoma. Tuomet tegul s yra skaičių suma visose trijose eilutėse ir visuose penkiuose stulpeliuose. Kai sudedame visus 15 skaičių eilutėse, gauname sumą, lygią $3s$, nes yra 3 eilutės. Ta pati 15 skaičių suma, sudedant pagal stulpelius, yra lygi $5s$. Pastebėkime, kad šios dvi sumos turi būti vienodos, nes abiem atvejais sudedant kiekvienas skaičius nuo 1 iki 15 pridedamas tik vieną kartą. Todėl, $3s = 5s$, o tai neįmanoma jokiame natūraliajam skaičiui s .

12. **Atsakymas:** 519.

Tegu n yra atliktų ėjimų kiekis, p - ėjimų padedant 4 korteles kiekis, q - ėjimų paimant 1 kortelę kiekis.

Ant stalo padėtų kortelių kiekis yra $4p - q$. Žaidimo pabaigoje visos 2026 kortelės padėtos, todėl $4p - q = 2026$ ir $q = 4p - 2026$.

Per žaidimą atliktų ėjimų kiekis $n = p + q = p + 4p - 2026 = 5p - 2026 = 5(p - 406) + 4$.

Per žaidimą mažiausiai gali tekti atlikti 507 kortelių padėjimo ėjimus, nes $2026/4 > 506$.

Taigi, mažiausias ėjimų kiekis žaidime yra $n = 5 \cdot (507 - 406) + 4 = 509$. Tačiau atlikus 509 ėjimus, žaidimą laimėtų Andrius, nes $509 \equiv 2 \pmod{3}$.

Žaidimas negali baigtis atlikus 510 ėjimų, nes $n \equiv 4 \pmod{5}$.

Jeigu žaidime būtų atlikti 508 kortelių padėjimo ėjimai, tai viso ėjimų būtų $n = 5(508 - 406) + 4 = 514$. Tačiau atlikus 514 ėjimų, žaidimą laimėtų Pijus, nes $514 \equiv 1 \pmod{3}$.

Jeigu žaidime būtų atlikti 509 kortelių padėjimo ėjimai, tai viso ėjimų būtų $n = 5(509 - 406) + 4 = 519$. Tokiu atveju žaidimą laimėtų Trautė, nes $519 \equiv 0 \pmod{3}$.

Taigi, mažiausias ėjimų keikis žaidime, kai laimi Trautė yra 519.

Dabar reikia įsitikinti, kad toks žaidimas su 519 ėjimų yra įmonomas.

Pavyzdžio sukonstravimas

Sakykime, kad pradžioje visi žaidėjai dėjo korteles iš eilės be tarpų, taip po 502 ėjimo būtų užpildytos pirmosios 2008 pozijos. Paskutinės 18 pozicijų gali būti užimtos atlikus 3 padėjimo

ėjimus - 3 kartus paliekant po 1 vietos tarpą ir gale paliekant 3 tuščias vietas, kaip parodyta čia:

...	■	■		■	■	■	■		■	■	■	■		■	■	■	■				
-----	---	---	--	---	---	---	---	--	---	---	---	---	--	---	---	---	---	--	--	--	--

Kiekvienam 1 vietos tarpui užpildyti reikės atlikti dar po 4ėjimus - 3 paėmimus ir 1 padėjimą. Paskutiniam 3 vietų tarpui užpildyti prireiks 2ėjimų - 1 paėmimo ir 1 padėjimo.

Taigi, visas žaidime atliktųėjimų kiekis bus $502 + 3 + (3 \cdot 4 + 2) = 519$.

Ats. Mažiausias galimasėjimų keikis žaidime, kurį laimi Trautė, yra 519.

13. **Atsakymas:** a) ne; b) ne

Išanalizuokime, kaipėjimai veikia skaičių sumas. Pažymėkime dabartines skaičių reikšmes $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{300}$. Pritaikius pirmojo tipoėjimą, užrašyti skaičiai tampa:

$$b_1 = a_1 - a_{300} - a_2,$$

$$b_k = a_k - a_{k-1} - a_{k+1}, \quad k = 2, \dots, 299,$$

$$b_{300} = a_{300} - a_{299} - a_1.$$

a) Pastebėkime, kaip po kiekvienoėjimo keičiasi visų užrašytų skaičių suma. Jei bendra skaičių a_k suma yra

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{300},$$

tuomet skaičių b_k suma yra

$$a_1 - a_{300} - a_2 + a_2 - a_1 - a_3 + \dots + a_{300} - a_{299} - a_1 = -S,$$

nes kiekvienas a_k yra pridedamas vieną kartą ir du kartus atimamas.

Pritaikius antrojo tipoėjimą, visų skaičių suma yra arba $S + 2$, arba $S - 2$. Pastebėkime, kad nė vienas iš leidžiamųėjimų nekeičia visų skaičių sumos lyginumo. Kadangi pradžioje suma yra 1 (nelyginis skaičius), tai negalime gauti dviejų vienetų ir 298 nulių, nes jų suma yra 2 (lyginis skaičius).

b) Nagrinėkime, kaipėjimai veikia kintamųjų ženklų sumą. Jei skaičių a_k kintamųjų ženklų suma yra

$$S' = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{299} - a_{300},$$

tuomet pritaikius pirmojo tipoėjimą skaičių b_k kintamųjų ženklų suma yra

$$a_1 - a_{300} - a_2 - a_2 + a_1 + a_3 + \dots + a_{300} + a_{299} + a_1 = 3S',$$

o pritaikius antrojo tipoėjimą kintamųjų ženklų suma išlieka S' . Tarkime, kad galima gauti tris iš eilės einančius vienetus ir 297 nulių. Pradinė kintamųjų ženklų suma prieš atliekant bet kokįėjimą yra lygi 1. Kai ratu užrašyti trys iš eilės einantys vienetai ir 297 nuliai, kintamųjų ženklų suma yra arba 1, arba -1 , priklausomai nuo to, kur yra vienetai. Kadangi leidžiamiėjimai arba patrigubina kintamųjų ženklų sumą, arba jos nekeičia, darome išvadą, kad trys vienetai yra išdėstyti taip, kad kintamųjų ženklų suma yra 1, ir nebuvo leidžiami jokie pirmojo tipoėjimai.

Stebėkime skaičių, esančių vietose 3, 6, $\dots$, 300, sumą, t. y.

$$S_0 = a_3 + a_6 + \dots + a_{300}.$$

Pradžioje ši suma yra 0, o kai užrašyti trys iš eilės einantys vienetai ir 297 nuliai, ši suma yra 1. Tačiau taikant tik antrojo tipo ėjimą tos sumos lyginumas nesikeičia. Būtent, arba nė vienas iš skaičių $a_3, a_6, \dots, a_{300}$ nepakeičiamas, arba pakeičiame lygiai du iš jų, pakeisdami S_0 per 2 arba per -2 . Kadangi 0 ir 1 yra skirtingo lyginumo, tai parodo, kad negalime gauti trijų iš eilės einančių vienetų ir 297 nulių.

14. Kiekvienai įstrižainei pavadinkime būseną joje esančių žetonų skaičiaus lyginumą. Iš pradžių, dvidešimt jų yra nelyginės. Kiekvienas pašalinamas žetonas, paveikia dviejų įstrižainių, kuriose jis yra, būseną. Jos abi negali būti nelyginės. Jei viena yra nelyginė, o kita lyginė, tai bendras nelyginių įstrižainių skaičius lieka toks pats. Jei abi yra lyginės, šis skaičius padidėja dviem. Taigi jis negali sumažėti žemiau pradinės dvidešimties reikšmės. Iš to išplaukia, kad bent dešimt žetonų turi likti lentoje.

Pažymėkime langelius (i, j) , kur $0 \leq i, j \leq 9$ (i - eilutės, j - stulpelio numeris). Galime pašalinti visus žetonus, išskyrus penkis, iš langelių (i, j) , kuriuose $i + j$ yra nelyginis, būtent $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(7, 0)$ ir $(9, 0)$. Tai atliekama dešimčia etapų pašalinant žetonus iš langelių, naudojant lygines įstrižaines pakaitomis skirtingomis kryptimis:

0. $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(0, 5)$, $(0, 7)$ ir $(0, 9)$, 1. $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(1, 8)$.
2. $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$ ir $(2, 9)$, 3. $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(3, 8)$.
4. $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(4, 7)$ ir $(4, 9)$, 5. $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(5, 8)$.
6. $(6, 1)$, $(6, 3)$, $(6, 5)$, $(6, 7)$ ir $(6, 9)$, 7. $(7, 2)$, $(7, 4)$, $(7, 6)$, $(7, 8)$.
8. $(8, 1)$, $(8, 3)$, $(8, 5)$, $(8, 7)$ ir $(8, 9)$, 9. $(9, 2)$, $(9, 4)$, $(9, 6)$, $(9, 8)$.

	0	0	0	0	0	0
*	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2
*	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4
*	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6
*	7	7	7	7	7	7
	8	8	8	8	8	8
*	9	9	9	9	9	9

Panašiai galime pašalinti visus žetonus, išskyrus penkis, iš langelių (i, j) , kuriuose $i + j$ yra lyginis, būtent $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(6, 0)$ ir $(8, 0)$. Taigi lieka tik dešimt žetonų pirmame stulpelyje.

15. **Atsakymas:** a) Taip b) Taip

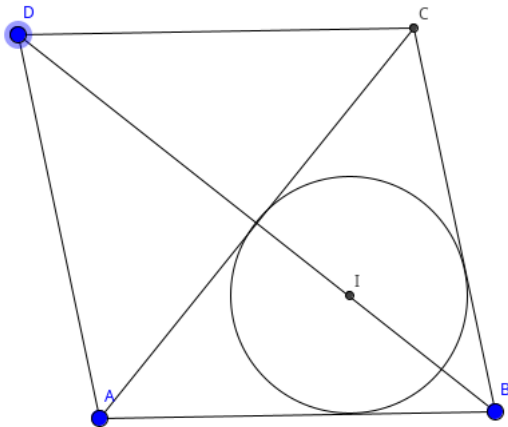
Sprendimas:

- a) Kiekvienoms dviem paeiliui einančiom kortoms asistentas gali panaudoti nugarėles perduoti antrosios kortos rūšį. Taip magas gali atspėti visų lyginiais numeriais pažymėtų kortų rūšis. Tegu magas naudojasi tokiu algoritmu iki 34 numeriu pažymėtos kortos (jau atspėjo bent 17 kortų). Visų rūšių kortų pradžioje buvo po 9 ir magas galėjo suskaičiuoti, kokios liko paskutinių dviejų kortų rūšys. Jei paskutinės dvi kortos yra tos pačios rūšies,

papildomos pagalbos nereikia. Jei ne, asistentas gali panaudoti 35 numeriu pažymėtos kortos nugarėlę, kad parodytų, ar ji yra aukštesnio ar žemesnės rūšies (rūšys rikiuojamos alfabetiškai). Todėl magas gali garantuoti bent 19 teisingų atsakymų.

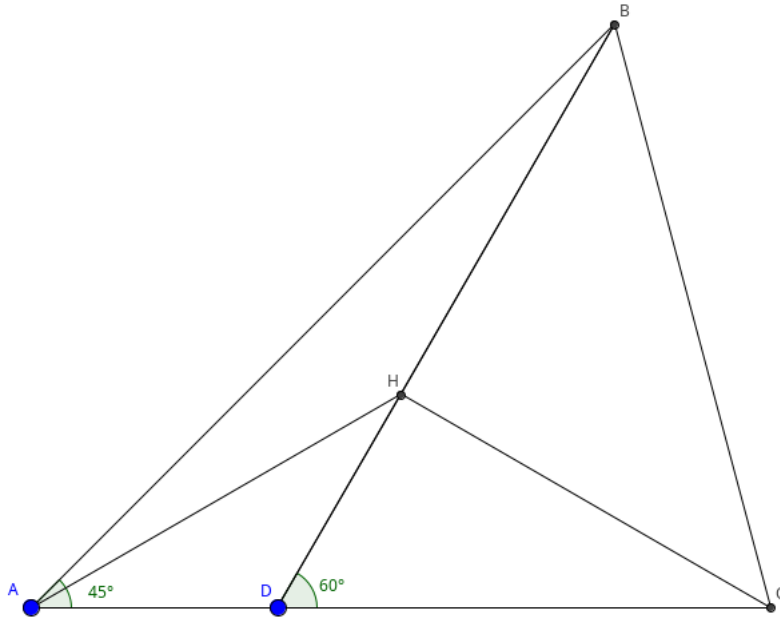
- b) Asistentas apžiūri nelyginiais numeriais pažymėtas kortas, išskyrus 1 numeriu pažymėtą kortą. Pagal apibendrintą Dirichlė principą bent 5 iš jų yra tos pačios rūšies. Asistentas panaudoja 1 ir 2 numeriais pažymėtų kortų nugarėles šiai rūšiai nurodyti, o magas visada spėja šią rūšį visoms nelyginiais numeriais pažymėtomis kortoms. Lyginiais numeriais pažymėtų kortų, išskyrus 2 numeriu pažymėtą kortą, rūšys gali būti teisingai nuspėtos kaip (a) dalyje. Taigi magas gali garantuoti bent $5 + 17 = 22$ teisingus atsakymus. Pastaba: sprendimas veikia net esant bet kokiam pasiskirstymui tarp kortų rūšių.

16. **Atsakymas:** b) ne.



Sprendimas: a) Kadangi trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras yra įstrižainėje BD , galime daryti išvadą, kad BD yra $\angle ABC$ pusiaukampinė. Todėl $\angle ABD = \angle CBD$. Tačiau, kadangi $ABCD$ yra lygiagretainis, $\angle ABD = \angle CDB$. Vadinasi, trikampis BCD yra lygiašonis, t. y. $|BC| = |CD|$. Taigi, $ABCD$ yra rombas.

b) Tegul $ABCD$ yra stačiakampis, kurio kraštinių ilgiai skirtingi. Trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras yra stačiakampio įstrižainių susikirtimo taške. Matome, kad visos sąlygos patenkinamos, tačiau $ABCD$ nėra rombas.



17.

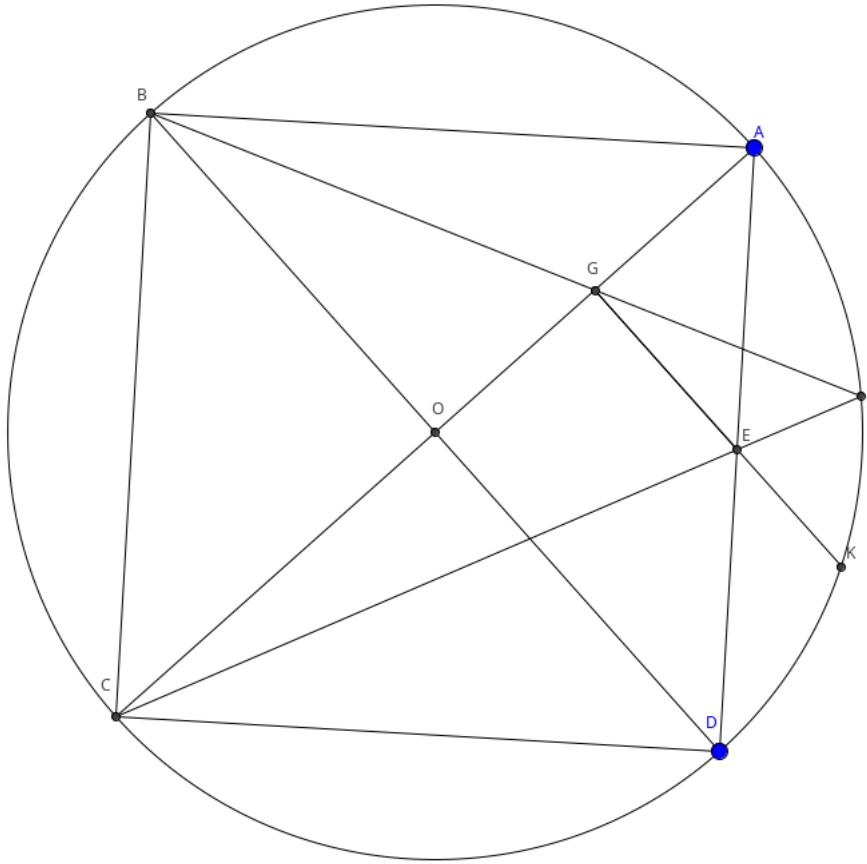
Atsakymas: $\angle BCD = 75^\circ$.

Sprendimas: Nuleiskime statmenį CH iš C į atkarpą BD (žr. pav.). Pažymėkime $AD = x$, $CD = 2x$. Tuomet $\angle DCH = 30^\circ$, $DH = x$, o $\triangle ADH$ yra lygiašonis. Kadangi $\angle ADH = 120^\circ$, gauname $\angle DAH = \angle AHD = 30^\circ$. Taigi, $\angle HAB = 15^\circ$. Be to, $\angle HBA = 15^\circ$, todėl $\triangle ABH$ yra lygiašonis ir $AH = BH$. Kadangi $\angle HAC = 30^\circ = \angle HCA$, $\triangle AHC$ yra lygiašonis ir $AH = CH$, taigi, $\triangle BHC$ taip pat yra statusis ir lygiašonis. Gauname

$$\angle DBC = \angle HBC = \angle HCB = 45^\circ,$$

ir galiausiai apskaičiuojame

$$\angle BCD = \angle DCH + \angle HCB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ.$$



18.

Tegul O yra įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas, kuris taip pat yra apskritimo centras. Kadangi A, B, C, F yra ant apskritimo, turime

$$\angle BFC = \angle BAC = 45^\circ.$$

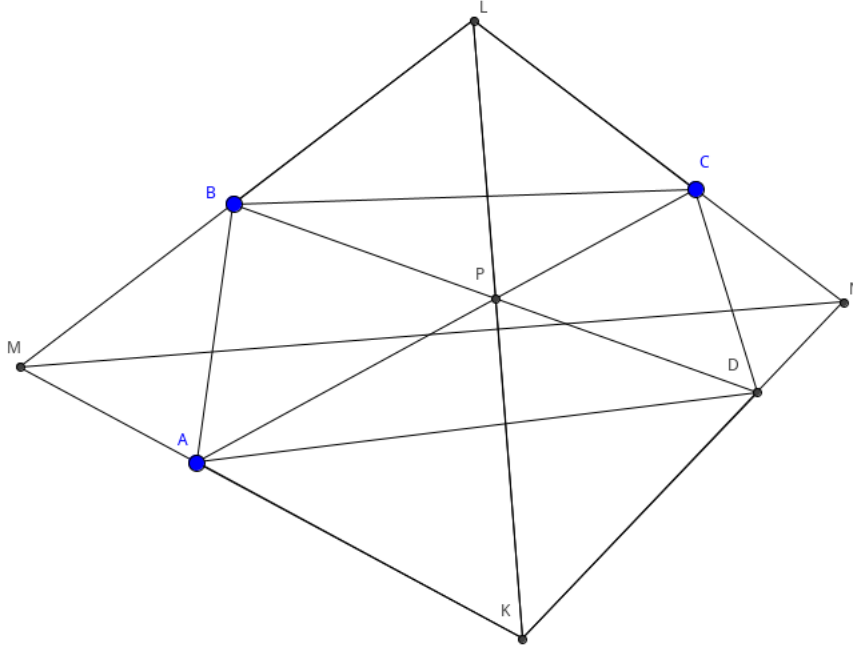
Kadangi $\angle CAD = 45^\circ$, gauname $\angle BFC = \angle CAD$, taigi $AGEF$ yra įbrėžtinis keturkampis.

Iš to išplaukia, kad

$$\angle AEG = \angle AFG = \angle AFC - \angle BFC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Kadangi taip pat $\angle ADB = 45^\circ$, tiesės EG ir DO yra lygiagrečios. Kadangi E yra AD vidurio taškas, G yra AO vidurio taškas. Kadangi DB yra statmena AC , dabar gauname, kad KG yra atkarpos AO vidurio statmuo. Taigi, $|AK| = |OK|$. Kadangi $|OK| = |OA|$ (abi yra spinduliai), dabar matome, kad AOK yra lygiakraštis trikampis. Gauname, kad $\angle OAK = 60^\circ$, taigi

$$\angle KAD = \angle OAK - \angle CAD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$



19.

Tegul $\angle APD = \angle BPC = \varphi$. Tuomet

$$\angle PKA = \angle PLB = \frac{180 - \frac{\varphi}{2}}{2}$$

kadangi trikampiai APK ir BPL yra lygiašoniai. Todėl, $MK = ML$.

Iš lygybių $AP = PK$, $BP = PL$ ir taško galios teoremos išplaukia, kad

$$PK \cdot PC = AP \cdot PC = BP \cdot PD = PL \cdot PD.$$

Vadinasi,

$$\frac{PK}{PL} = \frac{PD}{PC}.$$

Be to,

$$\angle KPD = \angle LPC = \frac{\varphi}{2}.$$

Todėl trikampiai KPD , LPC yra panašūs, taigi $\angle PKD = \angle PLC$. Vadinasi, $NK = NL$.

Dabar turime $MK = ML$ ir $NK = NL$. Iš to išplaukia, kad M ir N yra atkarpos KL vidurio statmenyje, o tai ir įrodo reikiamą teiginį.



Tegul H yra trikampio ABC ortocentras, o M yra jo kraštinės BC vidurio taškas. Tiesės DR ir EF yra lygiagrečios, todėl $\angle DRF = \angle EFA$. Keturkampis $AFHE$ yra įbrėžtinis ($\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$), todėl turime $\angle EFA = \angle EHA$. Keturkampis $BDHF$ taip pat yra įbrėžtinis ($\angle BDH = \angle BFH = 90^\circ$), todėl $\angle EHA = \angle DHB = \angle DFB = \angle DFR$. Dabar iš $\angle DRF = \angle DFR$ išplaukia, kad $|DR| = |DF|$.

Taškai M , F , E ir D yra tame pačiame apskritime (vadinamame devynių taškų apskritimu), todėl $\angle FMD = 180^\circ - \angle FED = \angle PED$. Taip pat, $\angle FDH = \angle FBH = \angle ABE = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACF = \angle ECH = \angle EDH$. Todėl, $\angle FDM = 90^\circ - \angle FDH = 90^\circ - \angle EDH = \angle PDE$, taigi trikampiai FDM ir PDE yra panašūs.

$$|DF| \cdot |DE| = |DP| \cdot |DM|,$$
$$|DR| \cdot |DQ| = |DP| \cdot |DM|,$$

Tegul k yra jo apibrėžtinis apskritimas. Kadangi $\angle NQP + \angle NRP < 180^\circ$, N yra apskritimo k viduje, t. y. atkarpoje CM , ir $N \neq M$. Kadangi M yra atkarpos BC vidurio taškas, galiausiai gauname $|BN| > |CN|$.