

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

V. LYGČIŲ SUDARYMO UŽDAVINIAI

(2025–2027)

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas
Edmundas Mazėtis

Atlikdami šią užduotį, turėsite spręsti uždavinius, kurių sprendimui padeda teisingai sudarytos lygtys arba lygčių sistemos. Tam, kad sudarytume lygtį ar lygčių sistemą, reikia visų pirma atidžiai perskaityti uždavinio sąlygą, kiek įmanoma pilnai išsiaiškinti situaciją, duotųjų ir ieškomųjų dydžių tarpusavio ryšius. Po to jau galima bandyti sudarinėti lygtis ar sistemas. Dažniausiai mokiniai nežinomaisiais žymi tuos dydžius, kuriuos reikia surasti, bet tai visiškai nebūtina. Kartais paprasčiau nežinomuojų žymėti nebūtinai ieškomąjį dydį, o kurį nors kitą, tuomet ieškomąjį dydį randame iš jo ryšių su pažymėtais nežinomaisiais. Be to, pastebėkime, kad surastąjį sprendinį svarbu patikrinti, nes dažnai lygties ar sistemos sprendinys netenkina uždavinio sąlygos. Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Rasime tokius du dviženklis skaičius, kad prie pirmojo skaičiaus iš dešinės prirašius antrąjį skaičių o po to dar skaitmenį 0, gaunamas penkiaženklis skaičius, kurį dalijant iš antrojo skaičiaus kvadrato gaunamas dalmuo 39 ir liekana 575. Kita vertus, jei prie pirmojo skaičiaus iš kairės prirašytume antrąjį o po to iš gauto skaičiaus atimtume skaičių, gautą prie antrojo skaičiaus iš kairės prirašius pirmąjį, gautume skirtumą 1287. Rasime tuos skaičius.

Sprendimas. Sakykime, kad tie skaičiai x ir y , čia x ir y yra natūralieji skaičiai ir $10 < x < 99$, $10 < y < 99$. Nagrinėkime pirmąjį uždavinio teiginį: jei turime dviženklį skaičių x ir prie jo prirašome kitą dviženklį skaičių y , tai gaunamas skaičius $100x + y$, o kai prie šio skaičiaus dar prirašome nulį, gaunamas 10 kartų didesnis skaičius, t. y. skaičius $1000x + 10y$. Dalijant šį skaičių iš y^2 , gaunamas dalmuo 39, o liekana 575, tą galima užrašyti $1000x + 10y = y^2 \cdot 39 + 575$. Gavome vieną lygtį. Antrąjį lygčiai gauti naudojame antrąjį uždavinio sąlygos teiginį: iš skaičiaus $100x + y$ atėmus skaičių, gautą prie antrojo skaičiaus prirašę pirmąjį, t. y. skaičių $100y + x$ gauname lygtį $(100x + y) - (100y + x) = 1287$. Kadangi šiose lygtyse nežinomieji x ir y reiškia tą patį, tai uždavinio sprendimui turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1000x + 10y = y^2 \cdot 39 + 575, \\ (100x + y) - (100y + x) = 1287. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties turime $x - y = 13$, $x = y + 13$. Įrašę šią išraišką į pirmąją lygtį ir atlikę akivaizdžius pertvarkymus, gauname kvadratinę lygtį $39y^2 - 1010y - 12425 = 0$. Šios lygties sprendiniai $y_1 = 35$, $y_2 = -\frac{355}{39}$. Tinka tik pirmoji šaknis, nes antroji nėra natūralusis skaičius. Tuomet $x = 13 + y = 48$. Nesunkiai patikriname, kad skaičių pora $x = 48$, $y = 35$ tenkina uždavinio sąlygą: tikrai prirašę prie 48 35 ir dar nulį, gauname skaičių 48350, kurį padaliję iš $35^2 = 1225$, gauname 39 ir liekaną 575; kita vertus, iš 4835 atėmę 3548, gauname 1287.

Atsakymas: ieškomieji skaičiai yra 48 ir 35.

2 pavyzdys. Du darbininkai dirbdami kartu darbą atlieka per 6 dienas. Dirbdamas vienas pirmasis darbininkas 40 procentų viso darbo atliktų 2 dienomis ilgiau, negu vienas dirbdamas antrasis atliktų $13\frac{1}{3}$ procento viso darbo. Per kiek laiko darbą atliktų kiekvienas darbininkas, dirbdamas vienas?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmasis darbininkas atliktų darbą per x dienų, o antrasis – per y dienų. Tuomet per vieną dieną jie abu atliktų $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ dalį darbo, todėl $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Pirmasis darbininkas 40 procentų darbo atliko per $0,4x$ dienas, o antrasis $13\frac{1}{3}$ procento viso darbo atliks per $\frac{40}{3} \cdot 0,01y$ dienos. Pagal sąlygą $0,4x - \frac{0,4}{3}y = 2$. Iš sistemos

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 0,4x - \frac{0,4}{3}y = 2 \end{cases}$$

randame $x = \frac{1}{3}y + 5$, $\frac{1}{\frac{1}{3}y+5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$, $6\left(y + \frac{1}{3}y + 5\right) = \left(\frac{1}{3}y + 5\right)y$, $\frac{1}{3}y^2 - 3y - 30 = 0$.

Gautosios kvadratinės lygties teigiamasis sprendinys yra $y = 15$, todėl $x = 10$.

Atsakymas: pirmasis darbininkas visą darbą atliktų per 10 dienų, antrasis – per 15 dienų.

3 pavyzdys. Prekybos įmonė a procentų turimos produkcijos pardavė, gaudama p procentų pelno, b procentų likusių prekių pardavė, gaudama už jas q procentų pelno. Kiek procentų pelno gauta už likusią prekių dalį, jei už visas prekes buvo gauta r procentų pelno?

Sprendimas. Sakykime, kad pradžioje buvo prekių už m eurų, tuomet pardavus dalį šios sumos už $\frac{ma}{100}$ eurų su p procentų pelnu, gauta $\frac{map}{100 \cdot 100}$ eurų pelno. Po šio pardavimo liko prekių už $m - \frac{ma}{100}$ eurų. Kadangi parduota b procentų šių prekių, o pelnas nuo šio pardavimo sudarė q procentų, tai nuo šios sumos gautas pelnas yra $(m - \frac{ma}{100}) \cdot \frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100}$ eurų. Po antrojo pardavimo liko prekių už $m - \frac{ma}{100} - (m - \frac{ma}{100}) \cdot \frac{b}{100} = m(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100})$ eurų. Jei šis likutis buvo parduotas su x procentų pelnu, tuomet nuo šios dalies pelnas yra $m(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100}) \cdot \frac{x}{100}$ eurų. Taigi viso buvo gauta $\frac{ma}{100} \cdot \frac{p}{100} + (m - \frac{ma}{100}) \cdot \frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} + m(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100}) \cdot \frac{x}{100}$ eurų pelno. Pagal sąlygą gauta r procentų pelno, taigi pelno gauta $\frac{mr}{100}$ eurų. Todėl turime lygtį $\frac{ma}{100} \cdot \frac{p}{100} + (m - \frac{ma}{100}) \cdot \frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} + m(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100}) \cdot \frac{x}{100} = \frac{mr}{100}$, iš kurios randame $x = \frac{r \cdot \frac{ap}{100} - \frac{bq}{100}(1 - \frac{ap}{100})}{(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100})}$.

Atsakymas: $\frac{r \cdot \frac{ap}{100} - \frac{bq}{100}(1 - \frac{ap}{100})}{(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100})}$.

4 pavyzdys. Yra du indai druskos tirpalo, viename druskos koncentracija yra 40 procentų, kitame – 60 procentų. Šių indų turinį supylė į trečią indą, dar įpylė 5 kg vandens ir gavo 20 procentų koncentracijos druskos tirpalą. Jei vietoje 5 kg vandens būtų įpylė 5 kg 80 procentų druskos tirpalo, tai būtų gavę 70 procentų druskos tirpalą. Kiek kilogramų tirpalo buvo pirmame ir kiek antrame inde?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmame inde buvo x kg tirpalo, o antrame – y kg. Tai reiškia, kad pirmame inde buvo $0,4x$ kg druskos ir $0,6x$ kg vandens, o antrame buvo $0,6y$ kg druskos ir $0,4y$ kg vandens. Kai šių indų turinį supylė į trečią indą ir dar pripylė 5 kg vandens, trečiame inde buvo $0,4x + 0,6y$ kg druskos, o viso inde buvo $x + y + 5$ kg mišinio. Pagal sąlygą šio mišinio koncentracija buvo 20 procentų, taigi $\frac{0,4x+0,6y}{x+y+5} = 0,2$. Kai buvo pripilta 5 kg 80 procentų tirpalo, tai buvo įpilta $5 \cdot 0,8 = 4$ kg druskos ir 1 kg vandens, taigi trečiame inde buvo $0,4x + 0,6y + 4$ kg druskos, o viso tirpalo masė buvo $x + y + 5$ kg. Pagal sąlygą $\frac{0,4x+0,6y+4}{x+y+5} = 0,7$. Iš sistemos

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2x + 0,2y + 1, \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7x + 0,7y + 3,5 \end{cases}$$

gauname $x = 1$, $y = 2$.

Atsakymas: pirmame inde buvo 1 kg tirpalo, antrame – 2 kg tirpalo.

5 pavyzdys. Jei turimą skystį supilstytume į 40 litrų talpos indus, tai vienas indas būtų nepilnas. Jei tą skystį išpilstytume į 50 litrų talpos indus, tai reikėtų penkiais indais mažiau ir visi jie būtų pilni. Jei tą patį skystį supilstytume į 70 litrų talpos indus, tai reikėtų dar keturiais indais mažiau ir vienas indas liktų nepilnas. Rasime, koks turėtų skysčio tūris.

Sprendimas. Sakykime, kad skysčio tūris x litrų, o pilant į 40 litrų talpos indus buvo pripildyta y indų, iš jų vienas nepilnas, tai pagal sąlygą $\frac{x}{40} < y$. Pilant į 50 litrų talpos indus, jų reikėjo $y - 5$, tai pagal sąlygą į šiuos indus tilpo visas skystis, taigi $\frac{x}{50} = y - 5$. Pilant po 70 litrų į indą, reikėjo dar 4 indais mažiau, taigi $y - 5 - 4 = y - 9$ indų, todėl pagal sąlygą $\frac{x}{70} < y - 9$. Iš lygybės išreiškiame $y = \frac{x}{50} + 5$ ir įrašome šią išraišką į abi nelygybes: $\frac{x}{40} < \frac{x}{50} + 5$, $\frac{x}{70} < \frac{x}{50} - 4$. Iš čia $x < 1000$ ir $x > 700$, taigi $700 < x < 1000$. Kadangi pagal sąlygą x reikšmė dalijasi iš 50 ir nesidalija iš 40, tai tinka 750, 850, 900 ir 950. Tikriname $x = 750$, tuomet reikėtų 19 indų po 40 litrų ir 15 indų po 50 litrų – prieštara, nes pagal sąlygą turėtų būti 14 indų po 50 litrų. Jei $x = 850$, tai reikės 22 indų po 40 litrų, 17 indų po 50 litrų ir 13 indų po 70 litrų – ši reikšmė tenkina uždavinio sąlygą. Jei $x = 900$, tai reikėtų 23 indų po 40 litrų, 18 indų po 50 litrų ir 13 indų po 70 litrų – vėl netinka pagal sąlygą. Analogiškai patikriname, kad ir 950 reikšmė netinka.

Atsakymas: 850 litrų.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Berniukas atėjo į tirą, ir jam buvo pasakyta, kad po kiekvieno taiklaus šūvio jis gaus 5 žetonus, o po kiekvieno netaiklaus šūvio tris žetonus turės atiduoti. Berniukas atliko daugiau nei 10, bet mažiau nei 20 šūvių ir po kažkurio šūvio pas jį neliko nė vieno žetono. Kiek kartų berniukas iššovė ir kiek kartų pataikė į taikinį?

2. Pirmąją varžybų dieną normatyvo neišlaikė $\frac{1}{7}$ varžybose dalyvavusių mergaičių ir $\frac{1}{6}$ varžybose dalyvavusių berniukų. Sekančią dieną po lygiai mergaičių ir berniukų neišlaikė antro normatyvo, o per dvi dienas normatyvų neįveikė iš viso 48 berniukai ir 50 mergaičių. Abu šiuos normatyvus išlaikė dvigubai daugiau mergaičių negu berniukų. Kiek varžybose dalyvavo mergaičių ir kiek berniukų?
3. Du sunkvežimiai dirbdami kartu turėjo pervežti krovinį per 6 valandas. Bet vienas sunkvežimis pradėjo darbą tuomet, kai kitas jau buvo pervežęs $\frac{3}{5}$ viso krovinio, ir po to vienas pervežė likusį krovinį. Visas darbas buvo atliktas per 12 valandų. Per kiek laiko visą krovinį pervežtų kiekvienas sunkvežimis, dirbdamas atskirai?
4. Šachmatininkas žaidė simultaną (tai yra vienu metu prie skirtingų lentų žaidė su kažkoku skaičiumi priešininkų). Per pirmąsias dvi valandas jis laimėjo 10 procentų visų partijų ir 8 sužaidė lygiosiomis. Per kitas dvi valandas jis laimėjo 10 procentų likusių partijų, dvi partijas pralaimėjo ir 7 sužaidė lygiosiomis. Kiek partijų sužaidė šachmatininkas ir kiek jų laimėjo?
5. Jeigu ieškomą dviženklį skaičių padalysime iš jo skaitmenų sandaugos, tai gausime dalmenį 3 ir liekaną 9. Jei iš ieškomo skaičiaus skaitmenų sumos kvadrato atimsime jo skaitmenų sandaugą, tai gausime ieškomą dviženklį skaičių. Raskite tą skaičių.
6. Pirmuoju vamzdžiu baseinas pripildomas 1,5 karto ilgiau negu antruoju vamzdžiu. Kol pildė baseiną, pirmąsias 2 valandas dirbo tik pirmasis vamzdis, o po to dar 4 valandas dirbo abu vamzdžiai kartu ir baseinas buvo pripildytas. Per kiek laiko baseiną pripildytų kiekvienas vamzdis, dirbdamas atskirai?
7. Prie vienaženklio skaičiaus pridėjo 10. Po to šį gautą skaičių padidino tiek procentų, keliais procentais pradinis vienaženklis skaičius buvo padidintas pirmą kartą, ir gavo 72. Raskite tą vienaženklį skaičių.
8. Inde buvo 10 litrų druskos rūgšties. Dalį rūgšties išpylė ir į indą pripylė tokį pat kiekį vandens. Po to vėl nupylė tokį pat kiekį mišinio, o į indą vėl pripylė tokį pat kiekį vandens. Po to inde druskos rūgšties koncentracija tapo 64 procentai. Kiek litrų rūgšties buvo nupilta iš pradžių?
9. Vandens baseino tūris lygus 425 kubinių metrų, baseinas buvo pripildytas dviem vamzdžiais. Pirmasis vamzdis dirbo 5 valandom ilgiau negu antrasis. Jei pirmas vamzdis būtų dirbęs tiek laiko, kiek dirbo antrasis vamzdis, o antrasis – tiek, kiek dirbo pirmasis vamzdis, tai pirmuoju vamzdžiu būtų pritekėję dvigubai mažiau vandens, nei antruoju vamzdžiu. Jei abu vamzdžiai būtų pradėję darbą tuo pačiu metu ir dirbę kartu, tai baseinas būtų pripildytas per 17 valandų. Kiek laiko dirbo antrasis vamzdis?
10. Buvo nupirkta keletas vienodų knygų ir keletas vienodų albumų, be to, knygų nupirkta 6 daugiau negu albumų. Už knygas sumokėta 105,6 euro, o už albumus – 5,6 euro. Viena knyga buvo daugiau nei 10 eurų brangesnė už vieną albumą. Kiek buvo nupirkta knygų?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. spalio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://www4352.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>