

XL LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2026-09-26

1. Yra žinoma, kad Ana į darbą važiavo ilgiau nei vieną valandą. Taip pat žinoma, kad kiekvieną važiavimo valandą jos automobilio vidutinis greitis buvo 80 km/h. Ar gali būti, kad visos kelionės automobilio vidutinis greitis buvo 100 km/h?
2. Išspręskite lygtį $[x^2] - [-x^2] - 8[x] + 2 = 0$. ($[x]$ - didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x .)
3. Tegul C yra realusis skaičius, o (a_n) - realiųjų skaičių seka. Kiekvienam natūraliajam skaičiui n apibrėžkime $M_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Parodykite, kad jei visiems skirtingų natūraliųjų skaičių trejetams i, j, k galioja $(i-j)M_k + (j-k)M_i + (k-i)M_j = C$, tai (a_n) yra aritmetinė progresija.
4. Daugianaris $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ turi n skirtingų realiųjų šaknų $x_1, x_2, \dots, x_n$, kur $n > 1$. Daugianaris $nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$ turi šaknis $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Įrodykite, kad

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

5. Lygtys (I) ir (II) turi vieną bendrą šaknį. Duota, kad $n, m \neq 0$. Raskite visas (I) ir visas (II) lygties šaknis, išreikštas per n .

$$\begin{aligned} x^3 + mx - n &= 0 & (I) \\ nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 &= 0 & (II) \end{aligned}$$

6. Raskite teigiamą sveikąjį skaičių n , kuriam yra daugiausia skaitmenų porų (a, b) , $a, b \neq 0$, tokių, kad $\overline{ab} - \overline{ba} = n$ (čia $\overline{ab}$ reiškia dviženklį skaičių, kurio dešimčių skaitmuo yra a , o vienetų – b).
7. Du matematikos mokytojai Petras ir Antanas surašė vienos klasės vaikams pažymius. Paašškėjo, kad Petro parašytų pažymių „10“, „9“, „8“ ir „7“ kiekiai yra atitinkamai tokie patys kaip Antano parašytų pažymių „9“, „8“, „7“ ir „10“ kiekiai (kitokių pažymių nebuvo). Be to, abiejų mokytojų parašytų pažymių sumos yra lygios. Ar gali būti, kad Petro parašytų pažymių kiekis yra lygus 2026?
8. Raskite visus $a, b \in \mathbb{N}$, kad $|a-b| \leq 100$ ir $60a^2b - 32a^4 - 18b^2$ dalijasi iš 2026 ir yra neneigiamas.
9. Natūralieji skaičiai surašyti į seką tam tikra tvarka taip, kad kiekvienas skaičius pasirodo lygiai vieną kartą. Ar visada kur nors šioje sekoje egzistuoja skaičių blokas iš bent 2 iš eilės einančių skaičių, kad to bloko skaičių suma būtų pirminis skaičius?
10. Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurios tenkina šias sąlygas:
 - visiems natūraliesiems a, b galioja $f(a, b) + a + b = f(a, 1) + f(1, b) + ab$;
 - jei $a + b$ arba $a + b - 1$ dalijasi iš pirminio skaičiaus $p > 2$, tai $f(a, b)$ taip pat dalijasi iš p .
11. Ar galima skaičius $1, 2, \dots, 15$ įrašyti į 3×5 lentelės langelius taip, kad:

- (a) skaičių sumos visose trijose eilutėse būtų vienodos bei skaičių sumos visuose penkiuose stulpeliuose būtų vienodos (tačiau galbūt skirtųsi nuo skaičių sumų eilutėse)?
- (b) skaičių sumos visose trijose eilutėse ir visuose penkiuose stulpeliuose būtų visos vienodos?

12. Ant ilgo stalo yra paruoštos 2026 tuščios vietos (išdėliotos vienoje eilėje), į kurias galima padėti korteles. Vaikai žaidžia žaidimą su vienodomis kortelėmis. Kiekvieno ėjimo metu žaidėjas turi padėti 4 korteles į bet kurioje vietoje esančias 4 iš eilės laisvas vietas. Jeigu 4 iš eilės laisvų vietų niekur nėra, tai žaidėjas privalo nuo stalo pasiimti vieną, greta tuščios vietos esančią, kortelę. Žaidėjai vienas po kito daro po 1 ėjimą. Žaidimas baigiamas, kai visos 2026 vietos yra užimtos kortelėmis. Laimi žaidėjas, kuris atliko paskutinį ėjimą.

Žaidimą žaidžia trys vaikai: Pijus daro pirmąjį ėjimą, po to eina Andrius ir galiausiai Trautė. Kiek mažiausiai ėjimų galėjo būti padaryta žaidime, jeigu žinoma, kad laimėjo Trautė?

13. Ratu surašyti 299 nuliai ir vienas vienetas. Leidžiami tokie ėjimai:

- pasirinkti visus skaičius ir vienu metu iš kiekvieno skaičiaus atimti abu jo kaimyninius skaičius;
- pasirinkti du skaičius taip, kad tarp jų būtų lygiai du kiti skaičiai, ir arba abu pasirinktus skaičius padidinti 1, arba abu juos sumažinti 1.

Ar galime baigtiniu ėjimų skaičiumi pasiekti, kad ratu būtų surašyti šie skaičiai: a) du iš eilės einantys vienetai ir 298 nuliai? b) trys iš eilės einantys vienetai ir 297 nuliai?

14. Kiekviena 10×10 lentos langelyje yra po žetoną. Galime pasirinkti įstrižainę, kurioje yra lyginis žetonų skaičius, ir pašalinti iš jos bet kurį žetoną. Koks yra didžiausias žetonų skaičius, kurį galima pašalinti iš lentos atliekant tokias operacijas?

15. Žiūrovai išmaišo 36 kortų kaladę, kurioje yra po 9 vynu, širdžių, būgnų ir kryžių rūšių kortas. Ant kiekvienos kortos nugarėlės yra nupiešta rodyklė. Mago asistentas apžiūri kaladę nekeisdamas kortų tvarkos ir nukreipia rodyklę ant kiekvienos kortos nugarėlės arba į magą, arba nuo jo, pagal tam tikrą iš anksto su magu suderintą sistemą. Tada magas, pradėdamas nuo viršutinės užverstos kaladės kortos, po vieną kartą spėja kiekvienos kortos rūšį. Ar egzistuoja tokia sistema, kuri leistų magui garantuoti, jog jis teisingai atspės bent a) 19 kortų rūšį? b) 20 kortų rūšį?

16. Turime lygiagretainį $ABCD$.

- (a) Įrodykite, kad jei trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras yra įstrižainėje BD , tai lygiagretainis $ABCD$ yra rombas.
- (b) Ar lygiagretainis $ABCD$ būtinai yra rombas, kai trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras yra įstrižainėje BD ?

17. Taškai A , D ir C yra paeiliui vienoje tiesėje taip, kad $CD = 2AD$. Taškas B parinktas taip, kad $\angle CAB = 45^\circ$ ir $\angle CDB = 60^\circ$. Raskite $\angle BCD$ dydį.

18. Kvadratas $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą. Tegul E yra atkarpos AD vidurio taškas. Tiesė CE dar kartą kerta apskritimą taške F . Tiesės FB ir AC susikerta taške G , o tiesė GE kerta apskritimo lanką AFD taške K . Raskite kampo $\angle KAD$ dydį.

19. Tegul P yra įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taškas. Taškai K ir L pažymėti atitinkamai $\angle APD$ ir $\angle BPC$ pusiau kampinėse taip, kad $AP = PK$ ir $BP = PL$. Tegul M yra tiesių AK ir BL susikirtimo taškas, o N yra tiesių KD ir LC susikirtimo taškas. Įrodykite, kad tiesės KL ir MN yra statmenos.

20. Tegul ABC yra smailusis trikampis toks, kad $|AB| > |AC|$, o D , E ir F yra jo aukštinių, nuleistų atitinkamai iš viršūnių A , B ir C , pagrindai. Tiesės EF ir BC susikerta taške P . Per D einanti tiesė, lygiagreti EF , kerta tieses AC ir AB atitinkamai taškuose Q ir R .

Įrodykite: jei N yra atkarpos BC taškas toks, kad $\angle NQP + \angle NRP < 180^\circ$, tai $|BN| > |CN|$.