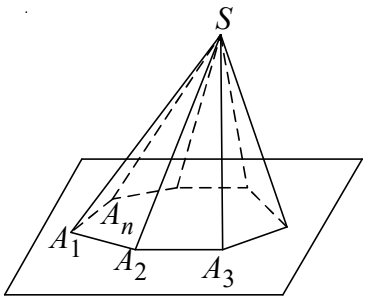
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

VI. PIRAMIDĖS IR KŪGIAI

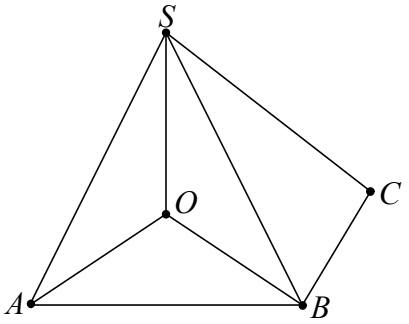
Teorinę medžiagą parengė ir šeštąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Atlikdami šią užduotį, nagrinėsite vieną iš briaunainių rūšių – piramides, o taip pat vieną sukinių rūšių – kūgius. Šios erdvės figūros dažnai sutinkamos įvairiose situacijose kartu, nes į piramidę yra įbrėžiamas arba apie ją apibrėžiamas kūgis.

Nagrinėjame n-kampį $A_1A_2 \dots A_n$, kurio visos viršūnės yra vienoje plokštumoje α, ir tašką S, nepriklausantį tai plokštumai. Tašką S sujunkime atkarpomis su taškais $A_1, A_2, \dots, A_n$, gauname n trikampių $A_1A_2S,\ A_2A_3S, \dots, A_nA_1S$, (1 pav.). Paviršius, sudarytas iš n-kampio $A_1A_2 \dots A_n$ ir minėtų n trikampių, vadinamas *n-kampe piramide*. Plokštuma α yra vadinama *piramidės pagrindo plokštuma*, daugiakampis $A_1A_2 \dots A_n$ vadinamas *piramidės pagrindu*, taškas S – *piramidės viršūne*, trikampiai $A_1A_2S,\ A_2A_3S, \dots, A_nA_1S$ – *piramidės šoninėmis sienomis*, atkarpos $A_1S,\ A_2S, \dots, A_nS$ – *piramidės šoninėmis briaunomis*.



1 pav.



2 pav.

Statmuo iš piramidės viršūnės S į pagrindo plokštumą, vadinamas *piramidės aukštine*.

Piramidė yra vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti to daugiakampio centrą su piramidės viršūne, yra piramidės aukštinė.

Įrodysime, kad taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Sakykime, kad atkarpa AB yra piramidės pagrindo viena kraštinė, taškas S yra piramidės viršūnė, o taškas O yra šios viršūnės ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje (2 pav.). Statieji trikampiai AOS ir BOS yra lygūs, nes jų statinis OS yra bendras, o kiti statiniai AO ir BO yra lygūs, nes jie yra apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžto apskritimo spinduliai. Iš trikampių lygumo gauname, kad $SA = SB,$ taigi trikampis ASB yra lygiašonis. Jei BC – kita pagrindo kraštinė, tai lygiai taip pat įrodome, kad $SB = SC$. Kadangi piramidės pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, tai $AB = BC,$ todėl lygiašoniai trikampiai ASB ir BSC yra lygūs. Lygiai taip pat įrodome, kad visos piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.

Iš šio įrodymo išplaukia, kad taisyklingosios piramidės šoninių sienų aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės S, yra lygios, jos vadinamos piramidės *apotemomis.*

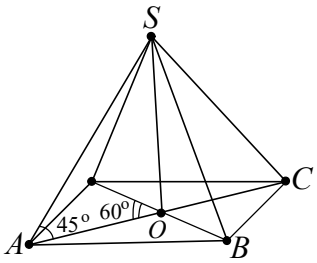
Kadangi atkarpa AO yra taisyklingosios piramidės šoninės briaunos SA ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje, tai kampas OAS yra kampas, kurį piramidės šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma. Iš aukščiau pateikto įrodymo gauname, kad visos taisyklingosios piramidės šoninės briaunos sudaro vienodus kampus su pagrindo plokštuma.

Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus visų jos šoninių sienų plotų sumai. Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus jos pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei. Piramidės tūris lygus piramidės pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

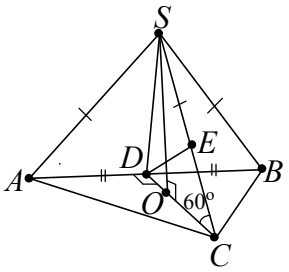
1 pavyzdys. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio plotas lygus S, o kampas tarp įstrižainių lygus 60^0. Visos piramidės šoninės briaunos yra lygios ir su pagrindo plokštuma sudaro vienodus kampus lygius 45^0. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa SO yra duotosios piramidės $ABCDS$ aukštinė. Statieji trikampiai AOS, BOS, COS ir DOS yra lygūs, nes jų statinis SO yra bendras, o įžambinės SA, SB, SC, SD yra lygios pagal sąlygą. Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $OA = OB = OC = OD$, taigi taškas O yra stačiakampio įstrižainių sankirtos taškas (3 pav.). Kadangi atkarpa OA yra atkarpos SA ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje, tai pagal kampo tarp tiesės ir plokštumos apibrėžimą kampas OAS yra kampas tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos, taigi $\angle OAS = 45^0$. Žymėkime $m = AO = BO = CO = DO$, trikampio AOB plotas lygus $\frac{1}{2}m^2 \sin 60^0 = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$, o kadangi šis plotas lygus ketvirtadaliui stačiakampio ploto, tai $m^2\sqrt{3} = S$, todėl $m = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$. Statusus trikampis OAS yra lygiašonis, nes jo smailusis kampas lygus 45^0, todėl piramidės aukštinė $OS = OA = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$. Taigi piramidės tūris $V = \frac{1}{3}S \cdot OS = \frac{S\sqrt{S}}{3\sqrt[4]{3}}$.

Atsakymas: $\frac{S\sqrt{S}}{3\sqrt[4]{3}}$.



3 pav.



4 pav.

2 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninės briaunos ilgis lygus 8, kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos lygus 60^0. Rasime atstumą tarp dviejų tiesių, kuriose yra piramidės prasilenkiančios briaunos.

Sprendimas. Rasime atstumą tarp tiesių, kuriose yra piramidės $SABC$ prasilenkiančios briaunos AB ir SC. Sakykime, kad trikampės piramidės šoninės briaunos $SA = SB = SC = 8$, taškas O yra viršūnės S ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje (4 pav.). Iš stačiųjų trikampių OAS, OBS, OCS lygumo gauname, kad $OA = OB = OC$, taigi taškas O yra apie lygiakraštį trikampį apibrėžto apskritimo centras. Todėl taškas O yra trikampio pusiaukampinės CD (kuri yra ir pusiaukraštinė) taškas toks, kad $CO : OD = 2 : 1$. Kadangi taškas O yra piramidės viršūnės S ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje, tai kampas OAS (o tai reiškia, kad ir kampai BOS, COS) yra kampai, kuriuos šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma, t. y. $\angle OAS = 60^0$. Kaip žinoma, atstumas tarp prasilenkiančių tiesių yra jo bendrojo statmens, kertančio abi tieses, ilgis. Taigi norint išspręsti uždavinį, reikia nubrėžti tiesę, kuri statmenai kirstų ir briauną AB, ir briauną SC. Tuo tikslu pastebime, kad plokštuma, einanti per taškus S, C, D, yra statmena tiesei AB. Tikrai, $SO \perp AB$, nes tiesė SO yra statmena pagrindo plokštumai, taigi ir bet kuriai jos tiesei, todėl ir tiesei AB. Be to, $CD \perp AB$, taigi tiesė AB yra statmena dviems susikertančioms tiesėms SO ir CD, esančioms minėtoje plokštumoje. Tuomet tiesė DE, kuri yra plokštumoje, einančioje per taškus S, C, D, ir kurioje yra trikampio SDC aukštinė, yra ieškomasis tiesių AB ir CS bendrasis statmuo, o atkarpos DE ilgis yra ieškomasis atstumas. Iš stačiojo trikampio SOC turime $CO = SC \cos \angle OCS = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$, $SO = SC \sin \angle OCS = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Iš lygybės $CO : OD = 2 : 1$ gauname, kad $OD = 2$, o $CD = 6$. Iš stačiojo trikampio SDO turime, kad $SD = \sqrt{DO^2 + SO^2} =$

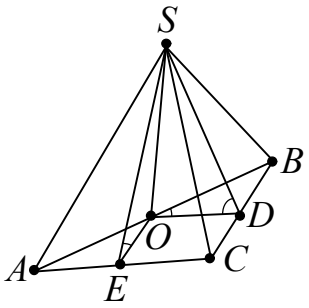
$\sqrt{2^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{52}$. Nubrėžiame trikampio SDC aukštinę DE, pažymėkime $SE = x$, tuomet $EC = 8 - x$. Trikampiams SED ir CDE taikome Pitagoro teoremą: $ED^2 = SD^2 - SE^2 = CD^2 - CE^2$. Įrašę atkarpų ilgius, gauname lygtį $52 - x^2 = 36 - (8 - x)^2$. Šios lygties sprendinys $x = 5$, todėl $ED = \sqrt{52 - 25} = 3\sqrt{3}$.

Atsakymas: $3\sqrt{3}$.

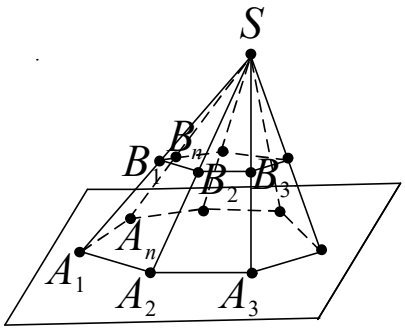
3 pavyzdys. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinis lygus a o prie jo esantis kampas lygus 60^0. Piramidės šoninė siena, einanti per trikampio įžambinę, yra statmena piramidės pagrindo plokštumai, o kitos dvi šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampės piramidės $SABC$ pagrindas yra statusis trikampis, kuriame $\angle C = 90^0$, $BC = a$, $\angle B = 60^0$. Kadangi plokštumos ASB ir ABC yra statmenos, tai piramidės aukštinė SO yra plokštumoje ASB, taigi taškas O yra įžambinės AB taškas (5 pav.). Iš taško O nubrėžiame statmenis $OE \perp AC$ ir $OD \perp BC$. Atkarpa OE yra atkarpos SE ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje, tai pagal trijų statmenų teoremą iš $OE \perp AC$ išplaukia, kad $SE \perp AC$. Todėl kampas OES yra dvisienio kampo tarp plokštumų ASC ir ABC tiesinis kampas, taigi $\angle SEO = 45^0$, o iš lygiašonio stačiojo trikampio OES gauname, kad $OE = OS$. Lygiai taip pat $\angle SDO = 45^0$, o $OD = OS$. Keturkampio $OECD$ trys kampai E, D, C yra statieji, taigi šis keturkampis yra stačiakampis, o iš lygybės $OE = OD$ išplaukia, kad jis yra kvadratas. Jo kraštinę žymėkime x, tuomet iš stačiojo trikampio ODB randame $BD = OD\ ctg\ 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Iš lygybės $BC = BD + DC$ gauname lygtį $a = \frac{x\sqrt{3}}{3} + x$, kurios sprendinys $x = \frac{3a}{\sqrt{3}+3}$. Tuomet piramidės aukštinė $OS = OD = \frac{3a}{\sqrt{3}+3}$, pagrindo plotas $S = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot atg\ 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, o tūris $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{3}+3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+3)} = \frac{a^3(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Atsakymas: $\frac{a^3(\sqrt{3}-1)}{4}$.



5 pav.



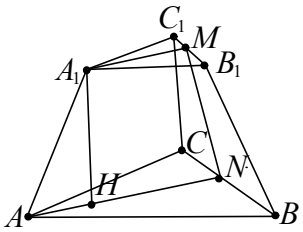
6 pav.

Sakykime, kad piramidės $SA_1A_2 \ldots A_n$ šonines briaunas taškuose $B_1, B_2 \ldots B_n$ kerta plokštuma, lygiagreti su pagrindo plokštuma (6 pav.). Šia plokštuma piramidė $SA_1A_2 \ldots A_n$ padalijama į du briaunainius. Briaunainis, kurio sienos yra n - kampiai $A_1A_2 \ldots A_n$ ir $B_1B_2 \ldots B_n$, esantys lygiagrečiose plokštumose, ir n trapecijų $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$, vadinamas *nupjautine piramide*. Atkarpos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, vadinamos nupjautinės piramidės *šoninėmis briaunomis*, minėtieji n – kampiai $A_1A_2 \ldots A_n$ ir $B_1B_2 \ldots B_n$ yra vadinami nupjautinės piramidės *pagrindais* – atitinkamai didesniuoju ir mažesniuoju, trapecijos $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ yra vadinamos nupjautinės piramidės *šoninėmis sienomis*. Statmuo,

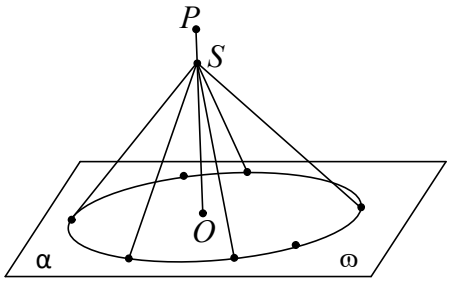
nuleistas iš nupjautinės piramidės vieno pagrindo bet kurio taško kitam pagrindui, vadinamas nupjautinės piramidės *aukštine*. Jei $SA_1A_2 \dots A_n$ – taisyklingoji n - kampė piramidė, tai nurodytu būdu iš jos gaunama nupjautinė piramidė - n - kampė *taisyklingoji nupjautinė piramidė*. Taisyklingosios nupjautinės piramidės visos šoninės sienos yra lygios lygiašonės trapecijos, šių trapecijų aukštinės vadinamos nupjautinės piramidės *apotemomis*. Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai yra panašieji taisyklingieji *n*-kampiai, jų centrus jungianti atkarpa yra taisyklingosios nupjautinės piramidės aukštinė. Nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotu vadinama jos šoninių sienų plotų suma. Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindų perimetrų sumos pusei, padaugintai iš apotemos. Jei S_1 ir S_2 – nupjautinės piramidės pagrindų plotai, H – jos aukštinė, tai nupjautinės piramidės tūris skaičiuojamas pagal formulę $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$.

4 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios 8 ir 4. Plokštuma, einanti per piramidės šoninę briauną ir prieš šią briauną esančios mažesniojo pagrindo briaunos vidurio tašką, kerta piramidę taip, kad pjūvio plotas lygus $6\sqrt{3}$. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad nupjautinės piramidės $ABCA_1B_1C_1$ taškas M yra mažesniojo pagrindo kraštinės B_1C_1 vidurio taškas, o plokštuma, einanti per taškus A, A_1 ir M, piramidės briauną BC kerta taške N (7 pav.). Kadangi lygiagrečias plokštumas ABC ir $A_1B_1C_1$ plokštuma AA_1M kerta lygiagrečiomis tiesėmis, tai tiesės AN ir A_1M yra lygiagrečios. Kadangi piramidės pagrindai yra lygiakraščiai trikampiai, tai pusiaukraštinė A_1M yra statmena briaunai B_1C_1, o briaunos $B_1C_1 \parallel BC$, todėl tiesės BC ir AN irgi statmenos. Taigi trapecija A_1MNA yra duotasis pjūvis. Šios trapecijos pagrindai yra lygiakraščių trikampių aukštinės, todėl $AN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $A_1M = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Taikydami trapecijos ploto formulę, rasime trapecijos aukštinę A_1H: $S = \frac{AN+A_1M}{2} \cdot A_1H$, $A_1H = \frac{2S}{AN+A_1M} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 2$. Kadangi atkarpa A_1H yra statmena piramidės pagrindams, tai ji yra piramidės aukštinė, todėl ieškomasis tūris $V = \frac{4}{3}(8^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{8^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}) = \frac{112}{3}\sqrt{3}$.



7 pav.

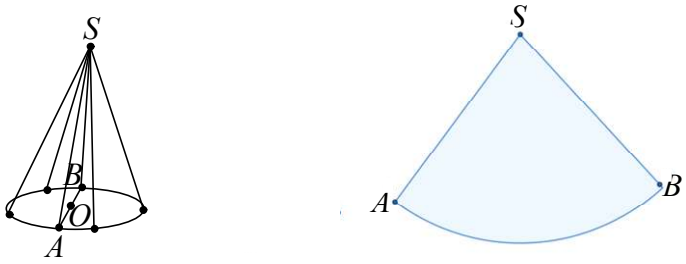


8 pav.

Sakykime, kad plokštumoje α yra apskritimas ω, kurio centras – taškas O, o spindulio ilgis lygus R. Nubrėžkime tiesę OP, statmeną plokštumai α, ir joje paimame tašką S, kurį sujungiame tiesės atkarpomis su kiekvienu apskritimo ω tašku (8 pav.). Paviršius, kurį sudaro minėtos atkarpos, vadinamas *kūginiu paviršiumi*, tos atkarpos – *kūginio paviršiaus sudaromosiomis*, o taškas S – *kūginio paviršiaus viršūne*. *Kūgiu* vadinamas kūnas, kurį riboja kūginis paviršius ir skritulys, kurio kontūras – apskritimas ω. Šis skritulys yra vadinamas *kūgio pagrindu*. Atkarpa OS yra vadinama *kūgio aukštin*e, o tiesė OP – *kūgio ašimi*.

Sakykime, kad kūgis kertamas plokštuma, einančia per kūgio ašį. Pjūvyje gaunamas lygiašonis trikampis, kuris vadinamas *kūgio ašiniu pjūviu*. Jei kūgį perpjautume per kurią nors jo sudaromąją

pvz., tiesę SA, ir visas sudaromąsias ištiesiame taip, kad jos būtų vienoje plokštumoje, gauname kūgio šoninio paviršiaus išklotinę (9 pav.), kuri yra skritulio išpjova SAB.



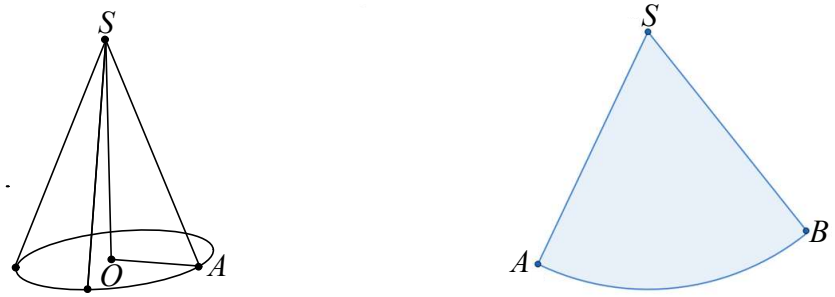
9 pav.

Kūginis paviršius yra vadinamas *kūgio šoniniu paviršiumi*. Jei kūgio pagrindo spindulio ilgis R, o sudaromosios ilgis l, tai kūgio šoninio paviršiaus plotas S lygus $S = \pi Rl$

Kūgio, kurio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinės ilgis H, tūris V lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui, t. y. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

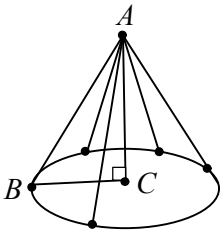
5 pavyzdys. Kūgio aukštinės ilgis lygus H, o jo išklotinė yra skritulio išpjova, kurios kampas lygus 120^0. Rasime kūgio tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad kūgio viršūnė yra taškas S, jo pagrindo centras – taškas O, o išklotinė yra skritulio išpjova ASB, kurios $\angle ASB = 120^0$ (10 pav.). Sakykime, kad kūgio sudaromosios ilgis lygus $AS = l$, o pagrindo spindulio ilgis $OA = R$. Kūgio išklotinė yra skritulio, kurio spindulys lygus l, išpjova. Taikydami išpjovos ploto formulę randame jos plotą $S = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot 120^0 = \frac{1}{3}\pi l^2$. Kita vertus, išpjovos plotas yra lygus kūgio šoninio paviršiaus plotui $S = \pi Rl$. Sulyginę šias šoninio paviršiaus ploto išraiškas gauname, kad $l = 3R$. Kita vertus, iš Pitagoro teoremos stačiajam trikampiui OAS turime $l = \sqrt{R^2 + H^2}$, todėl $3R = \sqrt{R^2 + H^2}$. Iš čia $9R^2 = R^2 + H^2$, $R = \frac{H}{\sqrt{8}}$. Taigi kūgio tūris $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (\frac{H}{\sqrt{8}})^2 \cdot H = \frac{\pi}{24}H^3$.

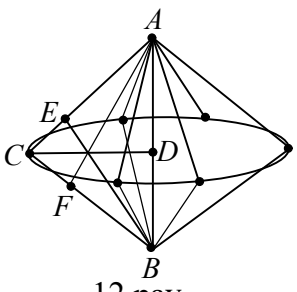


10 pav.

Tarkime, statusis trikampis ABC, $\angle C = 90^0$, sukamas apie tiesę AC (11 pav.). Gaunamas kūgis, kurio viršūnė yra A, pagrindo spindulys yra statinis BC, o aukštinė – statinis AC.



11 pav.



12 pav.

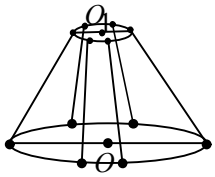
6 pavyzdys. Trikampis, kurio kraštinės lygios $AB = 5cm., AC = 7cm., BC = 8cm$, sukamas pradžioje apie tiesę AB, po to – apie tiesę AC, ir galiausiai – apie tiesę BC. Rasime gautųjų sukinių tūrių santykį.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $AB^2 + AC^2 - BC^2 > 0$, taigi trikampis ABC yra smailusis, todėl visos trys jo aukštinės yra trikampio viduje. Sakykime, kad trikampis ABC sukamas apie tiesę AB, atkarpa CD yra į kraštinę AB nubrėžta aukštinė (12 pav.). Sukant apie tiesę AB gaunami du kūgiai, kurių aukštinės yra atkarpos AD ir DB, o pagrindų spinduliai yra aukštinė CD. Todėl tų kūgių tūriai lygūs $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot AD$ ir $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot BD$, todėl jų tūrių suma $V_{AB} = \frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot (AD + BD) = \frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot AB$. Jei BE ir AF – kitos trikampio aukštinės, tai analogiškai randami kitų sukinių tūriai $V_{AC} = \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 \cdot AC$, $V_{BC} = \frac{1}{3}\pi \cdot AF^2 \cdot BC$. Jei S – trikampio ABC plotas, tai teisingos lygybės $AB \cdot CD = AC \cdot BE = BC \cdot AF = 2S$, iš čia $CD = \frac{2S}{AB} = \frac{2S}{5}$, $BE = \frac{2S}{AC} = \frac{2S}{7}$, $AF = \frac{2S}{BC} = \frac{2S}{8}$. Tuomet $V_{AB} : V_{AC} : V_{BC} = (\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2S}{5}\right)^2 \cdot 5) : (\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2S}{7}\right)^2 \cdot 7) : (\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2S}{8}\right)^2 \cdot 8) = \frac{1}{5} : \frac{1}{7} : \frac{1}{8}$.

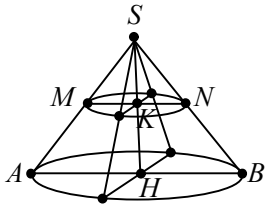
Kūgį kirskime plokštuma lygiagrečia su jo pagrindo plokštuma. Tos plokštumos ir kūgio sankirta yra skritulys, dalijantis kūgį į du paviršius: vienas paviršius yra kūgis, o kitas vadinamas *nupjautiniu kūgiu* (13 pav.). Duotojo kūgio pagrindas ir pjūvyje gautas skritulys vadinami *nupjautinio kūgio pagrindais*. Atkarpa OO_1 jungianti nupjautinio kūgio pagrindų centrus, yra vadinama *nupjautinio kūgio aukštine*. Kūginio paviršiaus dalis, ribojanti nupjautinį kūgį, vadinama *nupjautinio kūgio šoniniu paviršium*, kūginio paviršiaus sudaromųjų atkarpos, einančios tarp nupjautinio kūgio pagrindų, yra vadinamas *nupjautinio kūgio sudaromosiomis*. Plokštuma, einanti per nupjautinio kūgio aukštinę, kerta šį kūgį lygiašone trapecija, kuri vadinama nupjautinio kūgio ašiniu pjūviu. Pastebėkime, kad nupjautinis kūgis yra gaunamas stačiakampę trapeciją sukant apie jos pagrindams statmeną šoninę kraštinę.

Jei R ir r – nupjautinio kūgio pagrindų spindulių ilgiai, H – aukštinės ilgis, l – sudaromosios ilgis, tai nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas skaičiuojamas pagal formulę $S = \pi l(R + r)$,

o jo tūris – pagal formulę $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$.



13 pav.



14 pav.

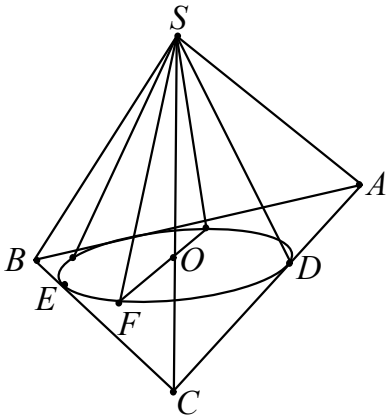
7 pavyzdys. Kūgio pagrindo spindulys lygus 10 cm, o jo sudaromosios ilgis yra 16 cm. Nubrėžta su kūgio pagrindo plokštuma lygiagreti plokštuma, dalijanti kūgį į mažesnį kūgį ir nupjautinį kūgį. Nupjautinio kūgio ir mažesniojo kūgio paviršių plotai yra vienodi. Rasime kokiu santykiu kertančioji plokštuma dalija duotojo kūgio aukštinę.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampis SAB yra duotojo kūgio ašinis pjūvis, kurį duotoji plokštuma kerta tiese MN, o kūgio aukštinę SH ši plokštuma kerta taške K (14 pav.). Jei h yra mažesniojo kūgio sudaromoji, o r – mažesniojo kūgio pagrindo spindulys, tai mažesniojo kūgio viso paviršiaus plotas $S_1 = \pi rl + \pi r^2$. Nupjautinio kūgio sudaromoji lygi $16 - l$, o pagrindų spinduliai 10 ir r, tai nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus $\pi(10 + r)(16 - l)$, o jo viso paviršiaus plotas $S_2 = \pi(10 + r)(16 - l) + \pi r^2 + 100\pi$. Kadangi plotai S_1 ir S_2 pagal sąlygą yra lygūs, turime $\pi rl + \pi r^2 = \pi(10 + r)(16 - l) + \pi r^2 + 100\pi$. Iš čia $2lr - 16r + 10l = 260$.

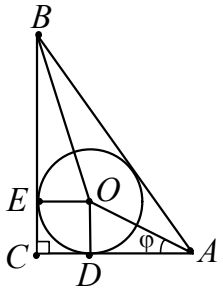
Iš panašiųjų trikampių SAB ir SMN turime, kad $\frac{SA}{AH}=\frac{SM}{MK}$, t. y. $\frac{l}{r}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$. Įrašę $r=\frac{5}{8}l$ į gautąją lygtį, turime $\frac{5}{4}l^2-10l+10l=260$, todėl $l^2=\frac{1}{5}\cdot 260\cdot 4=208$. Taigi $l=4\sqrt{13}$, $r=\frac{5}{8}\cdot 4\sqrt{13}=\frac{5}{2}\sqrt{13}$, $SK=\sqrt{l^2-r^2}=\frac{13}{2}\sqrt{3}$, $SH=\sqrt{16^2-10^2}=\sqrt{156}=2\sqrt{39}$, $KH=SH-SK=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{13}-13\right)$, todėl ieškomasis santykis $\frac{SK}{KH}=\frac{\frac{13\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{13}-13)}=\frac{\sqrt{13}}{4-\sqrt{13}}$.

8 pavyzdys. Kūgio pagrindo spindulys lygus r, o sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Apie kūgį apibrėžta trikampė piramidė, jos pagrindas yra statusis trikampis, kurio smailusis kampas lygus 2φ. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas S yra kūgio viršūnė, taškas O yra pagrindo centras, tai atkarpa OF yra kūgio sudaromosios SF ortogonalioji projekcija kūgio pagrindo plokštumoje, todėl kampas OFS yra kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos, taigi $\angle OFS=\varphi$ (15a pav.). Iš čia randame kūgio aukštinę $H=OS=r\,tg\,\varphi$. Sakykime, kad trikampis ABC, kurio $\angle C=90^0$ o $\angle A=2\varphi$ yra apibrėžtos apie kūgį piramidės pagrindas, todėl kūgio pagrindo apskritimas yra į šį trikampį įbrėžtas apskritimas (15 b pav.), liečiantis statinius AC ir BC atitinkamai taškuose D ir E. Taškas O yra trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas, taigi $\angle OAD=\varphi$ tuomet $AD=OD\,ctg\,\varphi=r\,ctg\,\varphi$. Kadangi $CD=CE=r$, tai statinio AC ilgis $AC=r+r\,ctg\,\varphi$. Kadangi $\angle B=\frac{\pi}{2}-2\varphi$, todėl $\angle EBO=\frac{\pi}{4}-\varphi$, taigi $BC=r+r\,ctg\,(\frac{\pi}{4}-\varphi)$. Todėl piramidės pagrindo plotas $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{r^2}{2}(1+ctg\,\varphi)(1+ctg\,\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right))$. Kadangi piramidės aukštinė sutampa su kūgio aukštine, tai piramidės tūris $V=\frac{1}{3}S\cdot OS=\frac{1}{3}\cdot\frac{r^2}{2}(1+ctg\,\varphi)(1+ctg\,\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\cdot r\,tg\,\varphi=\frac{r^3}{6}(tg\,\varphi+1)(1+ctg\,\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right))$



15a pav.



15b pav.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampės piramidės visos šoninės briaunos yra lygios a, vienas plokščiasis kampas prie viršūnės yra statusis, o kiti du lygūs po 60^0. Raskite piramidės tūrį.
2. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo briauna lygi a, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite piramidės tūrį.
3. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės briaunos ilgis lygus 10 cm, ji sudaro su pagrindo plokštuma 60^0 kampą. Raskite atstumą tarp tiesių, kuriose yra piramidės pagrindo įstrižainė ir prasilenkianti su ja piramidės briauna.

4. Trikampės piramidės $SABC$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, $\angle C = 90^0$, $BC = a$, $\angle B = 60^0$. Šoninė siena ASC yra statmena pagrindo plokštumai, o kitos dvi šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampus. Raskite piramidės tūrį.

5. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios 10 cm ir 4 cm. Piramidė kertama plokštuma, einančia per piramidės pagrindų įstrižaines, o gautojo pjūvio plotas lygus $28\sqrt{2}cm^2$. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

6. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios spindulys 9 cm, o išpjovą ribojantis apskritimo lankas lygus 90°. Raskite kūgio tūrį.

7. Rombo smailusis kampas lygus α. Rombas iš pradžių sukamas apie mažesniąją įstrižainę, o po to – apie didesniąją įstrižainę. Raskite gautų sukimosi paviršių tūrių santykį.

8. Kūgio pagrindo spindulys lygus 2 cm, o jo sudaromoji lygi 6 cm. Plokštuma, lygiagreti su kūgio pagrindo plokštuma, dalija kūgį į mažesnį kūgį ir nupjautinį kūgį taip, kad mažesniojo kūgio viso paviršiaus plotas du kartus mažesnis už nupjautinio kūgio viso paviršiaus plotą. Į kokio ilgio atkarpas ši plokštuma dalija kūgio aukštinę?

9. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi $4\sqrt{3}\ cm$, o jos šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Raskite į piramidę įbrėžto kūgio šoninio paviršiaus plotą.

10. Kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Į kūgį įbrėžta piramidė, jos pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai lygūs a ir b. Raskite piramidės tūrį.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2026 m. gruodžio 2 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA