Devintoji Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiada

2026 m. kovo 7 d., Vilnius

9 klasė

1. Duoti tokie teigiami realieji skaičiai a ir b, kad
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3, \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=10.$$
Apskaičiuokite $a^{-1}+b^{-1}$.

2. Keturkampio $ABCD$ įstrižainė AC lygi kraštinei AD. Kraštinėje AB yra toks taškas M, kad $\angle MDA = \angle ABD$. Įrodykite, kad $\angle ACM = \angle ABC$.

3. Kiekviename lentelės langelyje įrašytas skaičius 1 arba -1. Apskaičiavus kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą, visi gautieji skaičiai yra skirtingi. Ar tokia gali būti a) 5×6 lentelė; b) 6×6 lentelė?

4. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius 1, 2, 3, ..., $4n$ galima suskirstyti į n ketvertų, kad kiekviename ketverte vienas skaičius būtų lygus likusių trijų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Devintoji Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiada

2026 m. kovo 7 d., Vilnius

10 klasė

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus $(x,\ y,\ z)$, tenkinančius lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 33, \\ x + 3y + 5z = 34. \end{cases}$$

2. Trikampis ABC lygiašonis, $AB = BC$, o jo kampas B lygus 20°. Kraštinėje AB yra toks taškas M, kad $BM = AC$. Raskite kampą AMC.

3. Yra 9 užklijuotos dėžutės, kurių pirmoje yra 1 rutuliukas, antroje – 2 rutuliukai, ir t. t., devintoje dėžutėje yra 9 rutuliukai. Ant kiekvienos dėžutės yra užrašyta, kiek joje yra rutuliukų. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pradeda A. Kiekvienas savo ėjimu arba paima vieną rutuliuką iš bet kurios praplėštos dėžutės, arba praplėšia bet kurią užklijuotą dėžutę ir iš jos paima vieną rutuliuką. Pralaimi tas, kuris praplėšia paskutinę dėžutę. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.

4. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 4n$ galima suskirstyti į n ketvertų, kad kiekviename ketverte vienas skaičius būtų lygus likusių trijų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Devintoji Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiada

2026 m. kovo 7 d., Vilnius

11–12 klasės

1. Įrodykite, kad visiems realiesiems $x,\ y,\ z$ iš intervalo $[0;1]$ teisinga nelygybė
$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leqslant\frac{1}{3}.$$

2. Trikampis ABC lygiašonis, $AB=BC$, o jo kampas B lygus 20°. Kraštinėje AB yra toks taškas M, kad $BM=AC$. Raskite kampą AMC.

3. Yra 9 užklijuotos dėžutės, kurių pirmoje yra 1 rutuliukas, antroje – 2 rutuliukai, ir t. t., devintoje dėžutėje yra 9 rutuliukai. Ant kiekvienos dėžutės yra užrašyta, kiek joje yra rutuliukų. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pradeda A. Kiekvienas savo ėjimu arba paima vieną rutuliuką iš bet kurios praplėštos dėžutės, arba praplėšia bet kurią užklijuotą dėžutę ir iš jos paima vieną rutuliuką. Pralaimi tas, kuris praplėšia paskutinę dėžutę. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.

4. Duoti sveikieji skaičiai $a,\ b,\ c,\ D$, kuriems $a+b+c=0$, o skaičius
$$D-a^3b-b^3c-c^3a$$
yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Nustatykite, kurios iš šių D reikšmių yra galimos: a) 79; b) 2026; c) 2027 (skaičiai 79 ir 2027 yra pirminiai).