Devintoji Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiada

Užduotys ir sprendimai

2026 m. kovo 7 d., Vilnius

Edmundas Mazėtis ir Aivaras Novikas

9 klasė

1. Duoti tokie teigiami realieji skaičiai a ir b, kad

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3, \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=10.$$

Apskaičiuokite $a^{-1}+b^{-1}$.

Pirmasis sprendimas. Padauginkime duotąsias lygybes iš ab:

$$a^2+b^2=3ab, \qquad a^3+b^3=10ab.$$

Kadangi $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)=(a+b)(3ab-ab)=2ab(a+b)$, tai

$$2ab(a+b)=10ab \quad (ab\neq 0), \qquad a+b=5,$$

$$25=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3ab+2ab=5ab, \qquad ab=5,$$

$$a^{-1}+b^{-1}=\frac{a+b}{ab}=\frac{5}{5}=1.$$

Antrasis sprendimas. Pažymėkime $x=a^{-1}+b^{-1}$. Pirmąją duotąją lygybę pakelkime kvadratu, o antrąją padauginkime iš x:

$$9=3^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2, \qquad \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7;$$

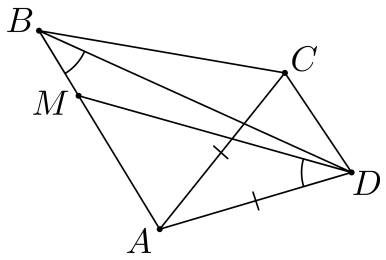
$$10x=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=3+7=10.$$

Vadinasi, $x=10:10=1$.

Pastaba. Dėl simetrijos galime tarti, kad $a\geqslant b$. Pažymėję $y=\frac{a}{b}$, turime $y+y^{-1}=3$. Tada $y^2-3y+1=0$ ir $y\geqslant 1$ – galime gauti y, o toliau a ir b pagal $a=by$ ir $ay+by^{-1}=10$. Tačiau tai nebūtų grakščiausias sprendimas.

Ats.: $a^{-1}+b^{-1}=1$.

2. Keturkampio $ABCD$ įstrižainė AC lygi kraštinei AD. Kraštinėje AB yra toks taškas M, kad $\angle MDA = \angle ABD$. Įrodykite, kad $\angle ACM = \angle ABC$.



Sprendimas. Trikampiai ABD ir ADM panašieji: kampas A bendras, $\angle ABD = \angle ADM$. Taigi $AD : AM = AB : AD$. Kadangi $AD = AC$, tai $AC : AM = AB : AC$. Be to, $\angle CAM = \angle BAC$, todėl $\triangle ACM \sim \triangle ABC$ pagal dvi kraštines ir kampą. Vadinasi, $\angle ACM = \angle ABC$. Tai ir reikėjo įrodyti.

3. Kiekviename lentelės langelyje įrašytas skaičius 1 arba -1. Apskaičiavus kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą, visi gautieji skaičiai yra skirtingi. Ar tokia gali būti a) 5×6 lentelė; b) 6×6 lentelė?

Sprendimas. a) Uždavinio sąlygą tenkina tokia 5×6 lentelė:

1	1	1	1	1	-1	4
1	1	1	1	-1	-1	2
1	1	1	-1	-1	-1	0
1	1	-1	-1	-1	-1	-2
1	-1	-1	-1	-1	-1	-4
5	3	1	-1	-3	-5	Sumos

Čia skaičiai 1 ir -1 dėsningai surašyti, kad eilutėse skaičių -1 kiekiai būtų visi skirtingi ir stulpeliuose šie kiekiai būtų visi skirtingi. Sudarydami lentelę galime nesirūpinti, kad skaičių suma eilutėje (lyginė kaip 6 nelyginių skaičių suma) sutaps su skaičių suma stulpelyje (5 nelyginių skaičių suma, tad nelygine).

b) Pastebėkime, kad 6×6 lentelės eilutėje arba stulpelyje skaičių suma ne mažesnė nei $(-1) + (-1) + \ldots + (-1) = -6$ ir ne didesnė nei $1 + 1 + \ldots + 1 = 6$. Be to, kiekviena tokia suma tegali būti lyginė, nes tai šešių nelyginių skaičių suma. Taigi galimos daugiausiai 7 skirtingos skaičių sumos: -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6. Tačiau eilučių ir stulpelių skaičius 6×6 lentelėje yra $6 + 6 = 12 > 7$. Todėl esant bet kuriam skaičių surašymui 6×6 lentelėje, tarp jos eilučių ir stulpelių rasis tokie, kurių skaičių sumos sutaps.

Ats.: a) taip, gali; b) ne, negali.

4. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius 1, 2, 3, ..., $4n$ galima suskirstyti į n ketvertų, kad kiekviename ketverte vienas skaičius būtų lygus likusių trijų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Sprendimas. Pastebėkime: jei $a = (b + c + d) : 3$, tai $a + b + c + d = a + 3a = 4a$. Taigi jei tarp keturių natūraliųjų skaičių vienas lygus likusiųjų aritmetiniam vidurkiui, tai tų keturių skaičių suma dalijasi iš 4.

Tarkime, kad natūraliajam n reikiamas skaičių 1, 2, ..., $4n$ suskirstymas egzistuoja. Kiekvieno skaičių ketverto suma dalijasi iš 4, todėl iš 4 dalijasi ir visų skaičių suma

$$1 + 2 + \ldots + 4n = (1 + 4n) + (2 + (4n - 1)) + \ldots + (2n + (2n + 1)) = (4n + 1) \cdot 2n.$$

Kai n nelyginis, tai skaičius $(4n + 1) \cdot 2n : 4 = (4n + 1)n : 2$ nėra sveikasis (nelyginių skaičių $4n + 1$ ir n sandauga nelyginė). Vadinasi, skaičius n turi būti lyginis.

Kita vertus, jei skaičius $n = 2m$ lyginis, tai reikiamas natūraliųjų skaičių nuo 1 iki $4n = 8m$ suskirstymas į ketvertus egzistuoja. Pirmiausia juos galima suskirstyti į m aštuonetų, imant skaičius didėjimo tvarka: 1, 2, ..., 8; tada 9, 10, ..., 16; ir t. t. Aštuonetą 1, 2, ..., 8 galima suskirstyti į tinkamus ketvertus 1, 3, 4, 8 ir 2, 5, 6, 7. Čia $1 + 3 + 4 + 8 = 4 \cdot 4$ ir $2 + 5 + 6 + 7 = 4 \cdot 5$, todėl $4 = (1 + 3 + 8) : 3$ ir $5 = (2 + 6 + 7) : 3$. Toliau pastebėkime, kad panašiai į du tinkamus ketvertus galima suskirstyti kiekvieną turimą aštuonetą:

$$8k+1, 8k+2, \ldots, 8k+8 \quad \Longrightarrow \quad 8k+1, 8k+3, 8k+4, 8k+8; \quad 8k+2, 8k+5, 8k+6, 8k+7.$$

Šiuose ketvertuose likusių trijų skaičių vidurkiai yra $8k + 4$ ir $8k + 5$. Taigi visi lyginiai natūralieji skaičiai n yra tinkami.

Ats.: $n = 2m$, kai $m = 1, 2, 3, \ldots$.

10 klasė

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus $(x,\ y,\ z)$, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 33, \\ x + 3y + 5z = 34. \end{cases}$$

Sprendimas. Antrąją sistemos lygtį padauginę iš 2 ir atėmę iš pirmosios, gauname lygtį $x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 - 10z = -35$. Ją pertvarkykime, išskirdami pilnuosius kvadratus:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 10z + 25) = -35 + 1 + 9 + 25,$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0.$$

Realiųjų skaičių kvadratų suma lygi 0, tik kai kiekvienas dėmuo lygus 0 (visi dėmenys neneigiami). Todėl vienintelis galimas sprendinys yra $(x,\ y,\ z) = (1,\ 3,\ 5)$. Tačiau tada

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 \neq 33.$$

Vadinasi, duotoji lygčių sistema sprendinių neturi.

Ats.: tinkamų trejetų (x, y, z) nėra.

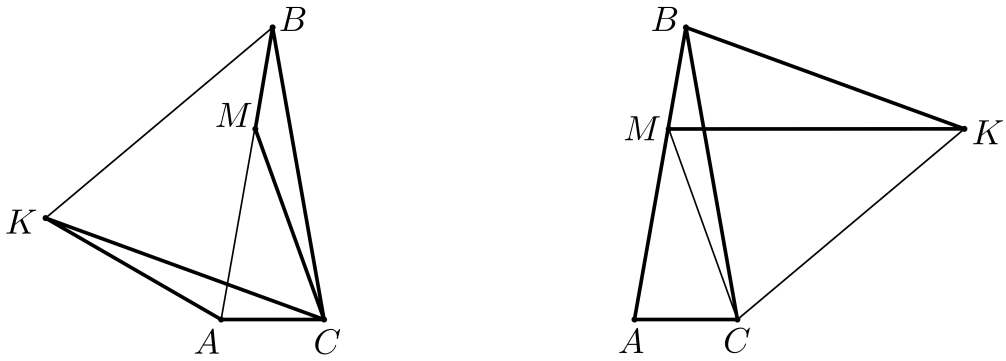
2. Trikampis ABC lygiašonis, $AB = BC$, o jo kampas B lygus 20°. Kraštinėje AB yra toks taškas M, kad $BM = AC$. Raskite kampą AMC.

Sprendimas. Trikampio ABC kraštinių ilgius pažymėkime $a = AB = BC$ ir $b = CA$. Tada $BM = b$. Lygiašonio $\triangle ABC$ kampai prie pagrindo lygūs $(180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Pažymėkime tokį tašką K, kad trikampis BCK būtų lygiakraštis. Tai galima padaryti dviem būdais – taškas K gali būti:

1) vienoje pusėje nuo tiesės BC kaip A (žr. pav. kairėje);
2) priešingoje pusėje nuo tiesės BC nei A (žr. pav. dešinėje).

Tada $\triangle BCK$ kraštinių ilgiai lygūs a, o kampai lygūs 60°. Norint išspręsti uždavinį, pakanka pažymėti tašką K bet kuriuo vienu būdu. Čia pateiksime abu sprendimus.



Pastebėkime lygius (paveikslėliuose paryškintus) trikampius. Atitinkamai gauname:

1) $\triangle ACK = \triangle MBC$ pagal $AC = b = MB$, $CK = a = BC$ ir $\angle ACK = \angle ACB - \angle BCK = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle MBC$; taigi $\angle MCB = \angle AKC = \angle AKB - 60^\circ$;
2) $\triangle BKM = \triangle ABC$ pagal $BM = b = AC$, $BK = a = AB$ ir $\angle MBK = \angle ABC + \angle CBK = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \angle CAB$; taigi $KM = a$ ir $\angle BKM = 20^\circ$.

Toliau pasinaudojame lygiašoniais trikampiais.

1) Lygiašonio $\triangle ABK$ $(BA = a = BK)$ kampai: $\angle ABK = \angle CBK - \angle ABC = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, $\angle AKB = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Tada $\angle MCB = \angle AKB - 60^\circ = 10^\circ$.
2) Lygiašonio $\triangle CKM$ $(KC = a = KM)$ kampai: $\angle CKM = \angle BKC - \angle BKM = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, $\angle KCM = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Tada $\angle MCB = \angle KCM - 60^\circ = 10^\circ$.

Spręsdami bet kuriuo iš dviejų būdų, gauname $\angle MCB = 10^\circ$. Vadinasi,

$$\angle AMC = 180^\circ - \angle BMC = \angle CBM + \angle MCB = \angle ABC + 10^\circ = 30^\circ.$$

Ats.: $\angle AMC = 30^\circ$.

3. Yra 9 užklijuotos dėžutės, kurių pirmoje yra 1 rutuliukas, antroje – 2 rutuliukai, ir t. t., devintoje dėžutėje yra 9 rutuliukai. Ant kiekvienos dėžutės yra užrašyta, kiek joje yra rutuliukų. Žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pradeda A. Kiekvienas savo ėjimu arba

paima vieną rutuliuką iš bet kurios praplėštos dėžutės, arba praplėšia bet kurią užklijuotą dėžutę ir iš jos paima vieną rutuliuką. Pralaimi tas, kuris praplėšia paskutinę dėžutę. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.

Sprendimas. Tarkime, kad žaidimo metu paskutinė nepraplėšta dėžutė pažymėta skaičiumi n. Galime tarti, kad praplėšus kitas 8 dėžutes abu žaidėjai traukia rutuliukus iš jų, kol jose rutuliukų nelieka, neliesdami dėžutės n. Juk jei kuris pasielgtų priešingai – iš karto pralaimėtų. Iš viso yra $1+2+\ldots+9=45$ rutuliukai, todėl, prieš praplėšiant dėžutę n, bus atlikta lygiai $45-n$ ėjimų. Kitą ėjimą atliekantis žaidėjas bus priverstas praplėšti dėžutę n ir pralaimės. Jei n būtų nelyginis, tai ėjimų skaičius $45-n$ būtų lyginis, o dėžutę n praplėštų A.

Pergalės strategiją turi B. Pradžioje jis gali praplėšti dėžutes 2, 4, 6, 8. Tam jam prireiks 4 ar mažiau ėjimų (kai kurias iš šių dėžučių gali praplėšti A). Ėjimų bus atlikta iš viso ne daugiau nei $4\cdot 2=8$, tad bent viena iš 9 dėžučių dar liks nepraplėšta. Kad ir kaip toliau bežaistų A ir B, skaičius n bus nelyginis, ir žaidėjas A pralaimės.

Ats.: pergalės strategiją turi B.

4. Žr. 9 klasės 4 uždavinį.

11–12 klasės

1. Įrodykite, kad visiems realiesiems $x,\ y,\ z$ iš intervalo $[0;1]$ teisinga nelygybė

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Sprendimas. Tegu $x,y,z\in[0;1]$. Pirmosios duotos trupmenos vardiklį įvertinkime taip: $7+y^3+z^3=6+1+y^3+z^3\geqslant 6+x^3+y^3+z^3$. Analogiškai įvertinę kitus vardiklius, įvertiname kairiąją duotosios nelygybės pusę, suvienodindami vardiklius, kad bendras vardiklis taptų simetriškas x, y, z atžvilgiu:

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}.$$

Pakanka įrodyti, kad

$$\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}\leqslant\frac{1}{3},\qquad\text{arba}\qquad 6+x^3+y^3+z^3\geqslant 3x+3y+3z.$$

Pertvarkyta nelygybė yra vienodų nelygybių $t^3+2\geqslant 3t,$ kai $t=x,y,z,$ suma. Taigi pakanka įrodyti, kad $t^3+2\geqslant 3t,$ kai $t\in[0;1]$. Tam galima pasinaudoti tapatybėmis

$$t^3-3t+2=(t^3-t)-(2t-2)=t(t+1)(t-1)-2(t-1)=(t^2+t-2)(t-1)=(t-1)^2(t+2)$$

arba vietoj to pritaikyti aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę:

$$t^3+2=t^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{t^3\cdot 1\cdot 1}=3t.$$

2. Žr. 10 klasės 2 uždavinį.

3. Žr. 10 klasės 3 uždavinį.

4. Duoti sveikieji skaičiai $a,\ b,\ c,\ D$, kuriems $a+b+c=0$, o skaičius

$$D-a^3b-b^3c-c^3a$$

yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Nustatykite, kurios iš šių D reikšmių yra galimos: a) 79; b) 2026; c) 2027 (skaičiai 79 ir 2027 yra pirminiai).

Sprendimas. Tarkime, kad $k^2=D-a^3b-b^3c-c^3a,$ kur $k\geqslant 0$ (čia skaičius k sveikasis). Kadangi $c=-(a+b)$, tai

$$k^2-D=-a^3b-b^3c-c^3a=-a^3b+b^3(a+b)+(a+b)^3a=$$

$$=a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4=\left(a^2+ab+b^2\right)^2,$$

$$D=(k-a^2-ab-b^2)(k+a^2+ab+b^2).$$

Čia $a^2+ab+b^2=\frac{1}{4}\left((2a+b)^2+3b^2\right)\geqslant 0$, todėl $k+a^2+ab+b^2\geqslant 0$. Jei $D>0$, tai abu dauginamieji $k\pm(a^2+ab+b^2)$ teigiami, o mažesnįjį iš jų gausime, vietoj $\pm$ pasirinkę minusą. Šie du skaičiai to paties lyginumo, tad jų sandauga D arba nelyginė, arba dali iš 4. Taigi $D\neq 2026$.

Toliau galime tarti, kad $D=79$ arba 2027. Skaičius D pirminis, todėl vieninteliu būdu išreiškiamas dviejų natūraliųjų skaičių sandauga, kur pirmas dauginamasis didesnis:

$$k+a^2+ab+b^2=D,\qquad k-a^2-ab-b^2=1.$$

Tada $a^2+ab+b^2=\frac{D-1}{2}$. Jei $D=2027,$ tai $\frac{D-1}{2}=1013,$ o skaičius

$$(2a+b)^2=\left((2a+b)^2+3b^2\right)-3b^2=4\left(a^2+ab+b^2\right)-3b^2=4\cdot 1013-3b^2$$

dalijasi iš 3 su liekana 2 (kaip ir skaičius $4\cdot 1013$). Tačiau sveikojo skaičiaus kvadratas $(2a+b)^2$ dalijasi iš 3 su liekana 0 (kai $2a+b$ dalijasi iš 3) arba su liekana 1 (kai $2a+b$ dalijasi iš 3 su liekana 1 arba 2). Vadinasi, $D\neq 2027$.

Kai $D=79,$ tai $\frac{D-1}{2}=39,$ o lygtis $a^2+ab+b^2=39$ turi sprendinį $(a,b)=(2,5),$ kuris kartu su $c=-a-b=-7$ ir $k=1+a^2+ab+b^2=40$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: tinka a) $D=79$.