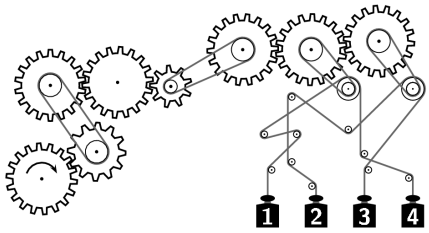
XXVI LIETUVOS 5–6 KLASIŲ IR 7–8 KLASIŲ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Užduotys ir sprendimai

Aivaras Novikas

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2026 m. rugsėjo 26 d.

Atsakymų lentelė pateikta paskutiniame puslapyje.



1 (5–6 kl.). Kurie du svareliai kils aukštyn, kairiajam apatiniam krumpliaračiui sukantis pagal laikrodžio rodyklę?

A) 1 ir 2 **B)** 3 ir 4 **C)** 2 ir 4 **D)** 1 ir 3 **E)** 1 ir 4

Sprendimas. Krumpliaratį, kuris sukasi pagal arba prieš laikrodžio rodyklę, atitinkamai žymėsime A ir B. Krumpliaračiai, sujungti juosta, tegali būti AA arba BB, o sukibusieji krumpliais – AB arba BA. Pirmasis (kairysis apatinis) krumpliaratis yra A, todėl iš eilės vienas kitą veikiančių krumpliaračių seka yra ABBABBAB.

Taigi priešpaskutinis krumpliaratis yra A. Jis sujungtas juosta su rateliu, tad suka jį pagal laikrodžio rodyklę, keldamas svarelį 1. Paskutinis krumpliaratis yra B. Jis sujungtas juosta su rateliu, tad suka jį prieš laikrodžio rodyklę, keldamas svarelį 3.

Ats.: **D)** 1 ir 3.

2 (5–6 kl.). Ūla devynis skaičius 1, 2, 3, …, 9 po vieną įrašė 3×3 lentelės langeliuose, kad visos aštuonios trijų skaičių sumos eilutėse, stulpeliuose ir ilgosiose įstrižainėse būtų lygios. Tada Reda išbraukė skaičių 7 kartu su jo eilute bei stulpeliu. Kokia yra keturių neišbrauktų skaičių suma?

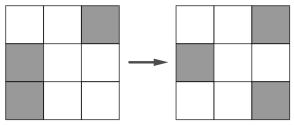
A) 21 **B)** 22 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

Sprendimas. Renkantis atsakymą, pakanka tinkamai užpildyti lentelę (žr. pav.) ir joje išbraukti reikiamus eilutę bei stulpelį. Tačiau sugaišime mažiau laiko pastebėję, kad visų įrašytų skaičių suma $1+2+\ldots+9$ lygi 45 ir todėl skaičių suma kiekvienoje eilutėje (tuo pačiu ir kiekviename stulpelyje) lygi $45 : 3 = 15$. Tokia yra skaičių suma ir išbrauktoje eilutėje (kuriame langelyje bebūtų skaičius 7), o skaičiaus 7 stulpelyje likusių dviejų išbrauktų skaičių suma lygi $15 - 7 = 8$. Taigi visų 5 išbrauktų skaičių suma lygi $15 + 8 = 23$, o keturių neišbrauktų skaičių suma lygi $45 - 23 = 22$.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Ats.: **B)** 22.

3 (5–6 kl.). Vienu ėjimu leidžiama sukeisti vietomis 3×3 lentelės bet kurias dvi eilutes arba bet kuriuos du stulpelius. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint pakeisti lentelę, kaip parodyta paveikslėlyje?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** Daugiau nei 4 **E)** Lentelės taip pakeisti neįmanoma

Sprendimas. Perrenkant galimybes, lengva patikrinti, kad vieno ėjimo nepakanka. Norint pasirinkti teisingą atsakymą, tai ir nebūtina, nes atsakymo 1 tarp pateiktųjų nėra. Dviejų ėjimų pakanka. Pirmuoju sukeitę pirmąją ir antrąją (nuo viršaus) eilutes, gauname galutinį lentelės vaizdą, tik atspindėtą vertikalės atžvilgiu. Tada reikiamą vaizdą gauname, antruoju ėjimu sukeitę pirmąjį ir trečiąjį stulpelius.

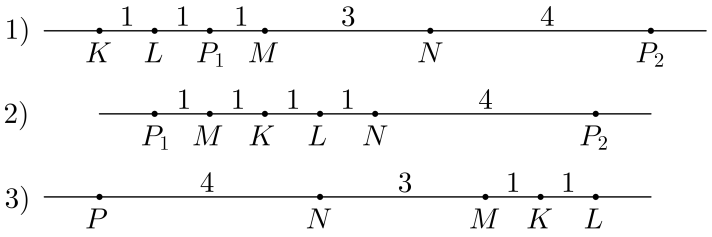
Ats.: **A)** 2.

4 (5–6 kl.). Tiesėje pažymėti taškai K, L, M, N, P (jokie du iš jų nesutampa; jų tvarka tiesėje nebūtinai tokia). Čia $KL = 1$, $LM = 2$, $MN = 3$, $NP = 4$. Austėja atstumą tarp dviejų labiausiai vienas nuo kito nutolusių pažymėtųjų taškų padaugino iš atkarpos PK ilgio. Raskite visų galimų gautosios sandaugos reikšmių sumą.

Sprendimas. Galime tarti, kad tiesė horizontali ir kad L yra dešinėje nuo K. Galimi tokie trys atvejai:

1) M yra dešinėje nuo L; tada N būtinai dešinėje nuo M, nes $N \neq K$;
2) M yra kairėje nuo L, o N dešinėje nuo M;
3) M yra kairėje nuo L, o N kairėje nuo M; tada P būtinai kairėje nuo N, nes $P \neq K$.

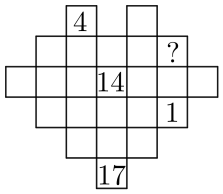
Pirmaisiais dviem atvejais gauname po dvi galimybes, kur gali būti P:



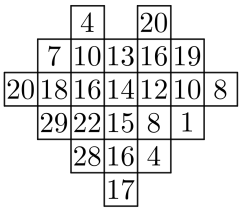
Vadinasi, Austėjos gauta sandauga lygi: 1) $KN \cdot P_1K = 6 \cdot 2 = 12$ arba $KP_2 \cdot P_2K = 10 \cdot 10 = 100$; 2) $P_1N \cdot P_1K = 4 \cdot 2 = 8$ arba $MP_2 \cdot P_2K = 7 \cdot 6 = 42$; 3) $PL \cdot PK = 9 \cdot 8 = 72$. Visų jos reikšmių suma lygi $12 + 100 + 8 + 42 + 72 = 234$.

Ats.: 234.

5 (5–6 kl.). Pavaizduotos figūros 23 langeliuose įrašyta po skaičių. Keturi iš jų parodyti paveikslėlyje. Kiekviename vienos eilutės arba vieno stulpelio gretimų langelių trejete vidurinis skaičius lygus kitų dviejų skaičių vidurkiui (tų dviejų skaičių sumai, padalytai iš 2). Koks skaičius pažymėtas klaustuku?



Sprendimas. Skaičių tiesėje dviejų skaičių x ir z vidurkis y yra per vidurį tarp jų. Einant nuo x prie y, o tada nuo y prie z, abu kartus kryptis ir atstumas bus tie patys. Taigi abu kartus skaičius tiek pat padidėja arba tiek pat sumažėja. Todėl iš eilės imant figūros bet kurios vienos eilutės arba stulpelio langelius, skaičiai juose vis po tiek pat didėja arba mažėja. Pavyzdžiui, figūros viduriniame stulpelyje skaičius 17 gaunamas padidinus skaičių 14 tris kartus po tiek pat. Kadangi $17 = 14 + 3$, tai kaskart didiname 1, o stulpelį sudaro skaičiai 13, 14, 15, 16, 17. Panašiai samprotaujant, galima užpildyti visus langelius (žr. pav.)

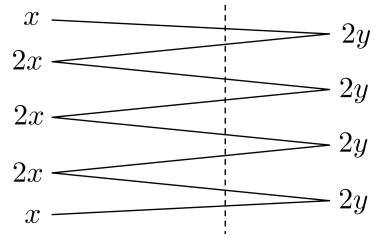


Apatinėje penkialangėje eilutėje tarp skaičių 15 ir 1 yra skaičius $(15+1) : 2 = 8$, o skaičiai šioje eilutėje didėja 7, einant iš dešinės: 1, 8, 15, 22, 29. Kairiajame penkialangiame stulpelyje padidinus skaičių 4 tris kartus po tiek pat, gaunamas skaičius $22 = 4 + 3 \cdot 6$. Taigi skaičiai didinami 6, ir čia turime 4, 10, 16, 22, 28. Viršutinėje penkialangėje eilutėje po skaičių 10 ir $13 = 10 + 3$ eina $13 + 3 = 16$ ir $? = 16 + 3 = 19$.

Ats.: 19.

6 (5–6 kl.). Ilga virvė perlenkta pusiau, tada vėl perlenkta pusiau ir dar trečią kartą perlenkta pusiau. Sulankstytoji virvė perkirpta ties vienu jos tašku, o ją po to išlanksčius gautos 9 trumpesnės virvės. Viena gautoji virvė yra tris kartus ilgesnė už kitą. Kiek kartų pradinė virvė galėjo būti ilgesnė už trumpiausią gautąją virvę? Raskite visus variantus ir įrodykite, kad kitų nėra.

Sprendimas. Tris kartus perlenkus virvę pusiau, ji sulankstoma į 8 lygias dalis, o tada vienu sykiu perkerpama per visas 8 dalis ir taip padalijama į 9 virves (kerpant perlenkimo taške, virvių išeitų mažiau). Tarkime, kad sulankstytos virvės galai nuo kirpimo taško nutolę atstumais x ir y. Kirpimą pavaizduokime tokia schema:



Gautųjų virvių ilgiai yra x (dvi virvės), $2x$ (trys virvės) ir $2y$ (keturios virvės). Vienas iš jų tris kartus didesnis už kitą. Trumpiausios virvės ilgis gali būti x arba $2y$ (bet ne $2x > x$), o pradinės virvės ilgis lygus $8x + 8y$. Ieškomą jo ir mažiausio ilgio santykį pažymėkime k. Turime keturis atvejus: 1) $x = 3 \cdot 2y$; 2) $2x = 3 \cdot 2y$; 3) $2y = 3 \cdot x$; 4) $2y = 3 \cdot 2x$. Vengiant ilgių žymėjimo raidėmis, kaskart galima tarti, kad $y = 1$ m ar pan., pasirenkant patogiausią ilgio reikšmę (tuo pačiu pasitikriname, kad atvejis išties galimas). Atitinkamai gauname:

1) $x = 6y$, tada $2y < x$ ir $k = (8x + 8y) : (2y) = 56y : (2y) = 28$;
   pavyzdžiui, $y = 1$ m, $x = 6$ m, pradinės virvės ilgis 56 m, trumpiausios virvės ilgis $2y = 2$ m;
2) $x = 3y$, tada $2y < x$ ir $k = (8x + 8y) : (2y) = 32y : (2y) = 16$;
   pavyzdžiui, $y = 1$ m, $x = 3$ m, pradinės virvės ilgis 32 m, trumpiausios virvės ilgis $2y = 2$ m;
3) $2y = 3x$, tada $x < 2y$ ir $k = (8x + 8y) : x = 20x : x = 20$;
   pavyzdžiui, $x = 2$ m, $y = 3$ m, pradinės virvės ilgis 40 m, trumpiausios virvės ilgis $x = 2$ m;
4) $y = 3x$, tada $x < 2y$ ir $k = (8x + 8y) : x = 32x : x = 32$;
   pavyzdžiui, $x = 1$ m, $y = 3$ m, pradinės virvės ilgis 32 m, trumpiausios virvės ilgis $x = 1$ m.

Ats.: 16, 20, 28, 32.

7 (5–6 kl.). Lentoje užrašyta 20 skaičių 1, 2, 3, ..., 20. Kajus ir Emilis žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas pasirenka bet kurį dar nenubrauktą skaičių lentoje ir jį nubraukia. Pirmąjį ėjimą atlieka Kajus. Jis laimi, jei po jo 10-ojo ėjimo Kajaus nubrauktų 10 skaičių suma dalijasi iš 10. Priešingu atveju laimi Emilis. Kuris žaidėjas turi pergalės strategiją (būdą laimėti, kad ir kaip žaistų kitas)? Koks bus atsakymas, jei sąlygoje visur skaičių 20 pakeisime į 30, o 10 į 15? Atsakymus pagrįskite.

Sprendimas. Abiem atvejais duotus skaičius suskirstykime poromis. Pirmuoju atveju – pagal paskutinį skaitmenį: (1, 11), (2, 12), ..., (10, 20). Šiose 10 porų skaičių skirtumas lygus 10. Antruoju atveju porose skirtumas bus lygus 15: (1, 16), (2, 17), ..., (15, 30).

Pirmuoju atveju pergalės strategiją turi Emilis. Po kiekvieno Kajaus ėjimo jis gali nubraukti skaičių iš tos pačios poros. Tada Kajus būtinai tam tikra tvarka nubrauks po vieną skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 0, 1, 2, ..., 9. Kajaus nubrauktų skaičių suma baigsis tuo pačiu skaitmeniu kaip suma $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, taigi baigsis skaitmeniu 5 ir iš 10 nesidalys.

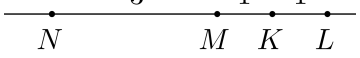
Antruoju atveju pergalės strategiją turi Kajus. Po kiekvieno Emilio ėjimo jis gali nubraukti skaičių iš tos pačios poros, jei šis nenubrauktas, o priešingu atveju – bet kurį dar nenubrauktą skaičių iš kitos poros. Tada po kiekvieno Kajaus ėjimo bus: lygiai viena pora, kur vienas skaičius nubrauktas Kajaus, o kitas apskritai nenubrauktas; kažkiek porų, kur vienas skaičius nubrauktas Kajaus, o kitas Emilio; likusios poros, kur joks skaičius nenubrauktas. Taip Kajus nubrauks po vieną skaičių iš kiekvienos poros. Tada Kajaus nubraukti skaičiai bus $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, ..., $a_{15} + 15$, kur kiekvienas a_i lygus 0 arba 15. Jų suma dalysis iš 15, nes iš 15 dalijasi ir $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}$, ir $1 + 2 + \ldots + 15 = 15 + (1 + 14) + (2 + 13) + \ldots + (7 + 8)$.

Ats.: pirmuoju atveju Emilis, antruoju atveju Kajus.

1 (7–8 kl.). Tiesėje pažymėti taškai K, L, M, N (jokie du iš jų nesutampa; jų tvarka tiesėje nebūtinai tokia). Čia $KL = 1$, $LM = 2$, $MN = 3$, $NK = 4$. Kurie du iš pažymėtųjų taškų yra labiausiai vienas nuo kito nutolę?

A) L ir N **B)** K ir N **C)** L ir M **D)** K ir M **E)** Neįmanoma nustatyti

Sprendimas. Galime tarti, kad tiesė horizontali ir kad L yra dešinėje nuo K. Jei M yra dešinėje nuo L, tai N būtinai dešinėje nuo M, nes $N \neq K$. Tačiau tada $NK = 6 \neq 4$ (netinka). Taigi M yra kairėje nuo L. Tada N yra kairėje nuo M (kitaip $NK = 2 \neq 4$):



Matome, kad K ir M yra tarp labiausiai nutolusių taškų L ir N.

Ats.: **A)** L ir N.

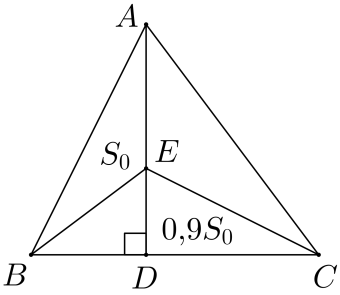
2 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 2 uždavinį.

3 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 6 uždavinį. Čia reikėjo pasirinkti, kuri pradinės virvės ilgio ir trumpiausios gautos virvės ilgio santykio k reikšmė nėra galima: **A)** 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 28 **E)** 32

Ats.: **C)** 24.

4 (7–8 kl.). Trikampio ABC kraštinėje BC yra toks taškas D, kad $\angle ADC = 90^\circ$ ir $BD : DC = 2 : 3$, o atkarpoje AD – toks taškas E, kad $S_{CDE} : S_{ABE} = 0{,}9$. Nustatykite skaičiaus $S_{ABC} : S_{ABE}$ reikšmę. (Čia S_{XYZ} žymi trikampio XYZ plotą.)

Sprendimas. Pažymėkime $S_0 = S_{ABE}$ (dėl patogumo būtų galima net tarti, kad $S_0 = 1$). Tada $S_{CDE} = 0{,}9S_0$. Statieji trikampiai BDE ir CDE turi bendrą statinį, o kitų jų statinių santykis lygus $BD : CD = 2 : 3$. Todėl $S_{BDE} : S_{CDE} = 2 : 3$ ir $S_{BDE} = \frac{2}{3} \cdot 0{,}9S_0 = 0{,}6S_0$. Analogiškai $S_{BDA} : S_{CDA} = 2 : 3$. Čia $S_{BDA} = S_{BDE} + S_{ABE} = 1{,}6S_0$. Taigi $S_{CDA} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}6S_0 = 2{,}4S_0$. Gauname $S_{ABC} = S_{BDA} + S_{CDA} = 4S_0$. Ieškomas santykis lygus $4S_0 : S_0 = 4$.



Ats.: 4.

5 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 5 uždavinį.

6 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 7 uždavinį.

7 (7–8 kl.). Austėja užrašė šimtaženklį skaičių m, nesidalijantį iš 10. Surašiusi šio skaičiaus skaitmenis atbulai – iš dešinės į kairę, ji gavo šimtaženklį skaičių n. Skaičius $n : m$ natūralusis. Kokia yra mažiausia galima jo reikšmė? Įrodykite, kad $n : m \neq 3$.

Sprendimas. Mažiausia galima $n : m$ reikšmė lygi 1. Ji gaunama, kai m skaitmenys vienodi – tada $n = m$.

Pažymėkime $m = A \ldots B$ (čia A ir B – pirmasis ir šimtasis skaitmenys). Tada $n = B \ldots A$.

Tarkime, kad $n : m = 3$. Skaičius $n = 3m$ šimtaženklis kaip ir m. Jei $A > 3$, tai skaičius $m = A \ldots B \geqslant 4\underbrace{00\ldots0}_{99}$ per didelis – skaičius $3m \geqslant 12\underbrace{00\ldots0}_{99}$ turėtų 101 skaitmenį. Taigi $A = 1$, 2 arba 3.

Skaičių $m = \ldots B$ padauginus iš 3 , gaunamas skaičius $n = \ldots A$. Jo paskutinis skaitmuo A priklauso tik nuo m paskutinio skaitmens B – sutampa su $3B$ paskutiniu skaitmeniu. Pavyzdžiui, jei $B = 6$, tai $3B = 18$ ir $A = 8$ (netinka, nes $A \leqslant 3$). Perrinkę galimybes gauname, kad $(A, B) = (1, 7)$, $(2, 4)$ arba $(3, 1)$. Tačiau jei $A = 1$, tai $m < 2\underbrace{00\ldots0}_{99}$ ir $n = 3m < 6\underbrace{00\ldots0}_{99}$, tad $B \neq 7$ (skaičius m per mažas, kad $3m$ prasidėtų skaitmeniu 7). O jei $A \geqslant 2$, tai skaičius $m \geqslant 2\underbrace{00\ldots0}_{99}$ per didelis: skaičiaus $3m$ pirmasis skaitmuo B būtų bent 6 ir negalėtų būti lygus 4 arba 1. Gavome prieštarą. Vadinasi, $n : m \neq 3$.

Pastaba. Reikšmė $n : m = 1$ gaunama labai lengvai. O kokia būtų antroji mažiausia galima $n : m$ reikšmė? Gal pavyktų rasti visas galimas $n : m$ reikšmes? Norint jas nustatyti, reikalingas ilgesnis tyrimas.

Jau įrodėme, kad $n : m \neq 3$. Panašiai įrodoma, kad $n : m \neq 2$. Jei $n = 2m$, tai $A \leqslant 4$ (kitaip n turėtų 101 skaitmenį) ir A lyginis (paskutinis $2m$ skaitmuo). Tada pagal m ir $n = 2m$ paskutinius skaitmenis gauname, kad $(A, B) = (2, 1)$, $(2, 6)$, $(4, 2)$ arba $(4, 7)$. Tačiau pagal m ir n pirmuosius skaitmenis gauname, kad jei $A = 2$, tai $4 \leqslant B < 6$, o jei $A = 4$, tai $B \geqslant 8$. Taigi $n : m \neq 2$.

Taip pat gana lengva atmesti $n : m = 5, 6, 7, 8$. Kadangi $n = 10m$ jau turėtų 101 skaitmenį, tai $n : m < 10$.

Atveju $n : m = 4$ prieštaros analogiškai negausime, tačiau mums liks vienintelė galimybė $A = 2$, $B = 8$. Toliau galima panašiai, tik kiek sudėtingiau nagrinėti skaičiaus m antrąjį bei priešpaskutinį skaitmenis ir gauti, kad būtinai $m = 21 \ldots 78$ (pamėginkite įrodyti savarankiškai!).

Taip susiaurinus galimybes, jau galima pasiryžti ne prieštaros ieškoti, o sugalvoti skaičiaus m pavyzdį, reiškiantį, kad prieštaros čia gauti ir nepavyktų. Jei skaičius m būtų ne šimtaženklis, o keturženklis, tai galėtume imti $m = 2178$ ir $n = 8712 = 4m$. O mūsų atveju tada tinka

$$m = \underbrace{21782178 \ldots 21782178}_{\text{25 kartus fragmentas 2178}}, \qquad n = \underbrace{87128712 \ldots 87128712}_{\text{25 kartus fragmentas 8712}} = 4m.$$

Panašiai tikrinant paskutinę likusią galimybę $n : m = 9$, taip pat galima gauti tinkamą skaičiaus m pavyzdį. Vadinasi, visos galimos $n : m$ reikšmės yra 1, 4 ir 9.

Ats.: 1.

Atsakymai

5–6 klasės:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
D	B	A	234	19	16, 20, 28, 32	1) Emilis; 2) Kajus

7–8 klasės:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A	B	C	4	19	1) Emilis; 2) Kajus	1